# 目　录

# 一、从组合数 $C_n^r$ 谈起

在中学课本中，大家已经见到过 $C_n^r$ 这个记号，它表示从 $n$ 个不同物体中每次取出 $r$ 个不同物体的所有可能取法的总数，它的计算公式是

$$C_n^r=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}. \qquad (1)$$

组合数有许多有趣的性质，例如

$$C_n^r=C_n^{n-r}, \qquad (2)$$

$$C_n^r+C_n^{r+1}=C_{n+1}^{r+1} \qquad (3)$$

是大家已经知道的．证明它们并不困难，只要把公式(1)直接代进去算就能得到．但是组合数的另外一些关系式直接用(1)来算就不那么容易了．例如，可以证明

$$C_n^0C_m^r+C_n^1C_m^{r-1}+\cdots+C_n^iC_m^{r-i}+\cdots+C_n^rC_m^0=C_{n+m}^r, \qquad (4)$$

特别，如果 $r=n=m$，利用公式(2)，就得到

$$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n.$$

如果直接用(1)来证明(4)，不是太容易的．下面给出(4)的一个简单证明．

我们从另一角度来考察组合数 $C_n^r$．大家都熟悉牛顿二项式定理：

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n,$$

从这里可以看出，组合数

$$C_n^0,\ C_n^1,\ \cdots,\ C_n^i,\ \cdots,\ C_n^n$$

恰好是 $n$ 次多项式 $(1+x)^n$ 展开式中相应幂次的系数．这样

一个普通的事实对我们有什么用呢？让我们多走一步，把 $(1+x)^n$，$(1+x)^m$ 的展开式都写出来：

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^ix^i+\cdots+C_n^nx^n,$$

$$(1+x)^m=C_m^0+C_m^1x+C_m^2x^2+\cdots+C_m^jx^j+\cdots+C_m^mx^m,$$

再把它们乘起来：

$$(1+x)^n(1+x)^m=(C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^ix^i+\cdots+C_n^nx^n)\cdot(C_m^0+C_m^1x+\cdots+C_m^jx^j+\cdots+C_m^mx^m) \quad (5)$$

容易知道，右边展开式中 $x^r$ 的系数是

$$C_n^0C_m^r+C_n^1C_m^{r-1}+\cdots+C_n^rC_m^0;$$

另一方面，

$$(1+x)^n(1+x)^m=(1+x)^{n+m}, \quad (6)$$

写出 $(1+x)^{n+m}$ 的展开式：

$$(1+x)^{n+m}=C_{n+m}^0+C_{n+m}^1x+\cdots+C_{n+m}^rx^r+\cdots+C_{n+m}^{n+m}x^{n+m}. \quad (7)$$

比较(5)，(7)两式中 $x^r$ 的系数，立刻得到

$$C_n^0C_m^r+C_n^1C_m^{r-1}+\cdots+C_n^rC_m^0=C_{n+m}^r,$$

这就是我们要证明的等式(4)．

在证明过程中，根本不需要组合数的公式(1)，而是用了显而易见的等式(6)，以及“恒等的多项式同次幂项的系数相等”这一事实．

这种方法不仅使(4)的证明变得很简单，而且能帮助我们发现组合数的新的关系式．例如把

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n \quad (8)$$

中的 $x$ 换成 $-x$，得到

$$(1-x)^n=C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-\cdots+(-1)^nC_n^nx^n,$$

两式相乘：

$$(1-x^2)^n=(C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^nx^n)$$
$$\cdot(C_n^0-C_n^1x+\cdots+(-1)^nC_n^nx^n);\tag{9}$$
另一方面，在(8)中用 $-x^2$ 代 $x$，便得
$$(1-x^2)^n=C_n^0-C_n^1x^2+C_n^2x^4-\cdots+(-1)^nC_n^nx^{2n}.\tag{10}$$
比较(9)、(10)中 $x^{2r}$ 的系数，得
$$C_n^0C_n^{2r}-C_n^1C_n^{2r-1}+C_n^2C_n^{2r-2}-\cdots+C_n^{2r}C_n^0=(-1)^rC_n^r.\tag{11}$$
比较(9)、(10)中 $x^{2r+1}$ 的系数，得
$$C_n^0C_n^{2r+1}-C_n^1C_n^{2r}+C_n^2C_n^{2r-1}-\cdots-C_n^{2r+1}C_n^0=0.\tag{12}$$
如果 $n$ 是偶数，在(11)中取 $r=\frac{n}{2}$，并注意到 $C_n^k=C_n^{n-k}$，便有
$$(C_n^0)^2-(C_n^1)^2+(C_n^2)^2-\cdots+(C_n^n)^2=(-1)^{\frac{n}{2}}C_n^{\frac{n}{2}},\tag{13}$$
如果 $n$ 是奇数，在(12)中取 $r=\frac{n-1}{2}$，即得
$$(C_n^0)^2-(C_n^1)^2+(C_n^2)^2-\cdots-(C_n^n)^2=0.\tag{14}$$
(13)，(14)可以合并成
$$(C_n^0)^2-(C_n^1)^2+(C_n^2)^2-\cdots+(-1)^n(C_n^n)^2$$
$$=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}C_n^{\frac{n}{2}}, & \text{如果 } n \text{ 是偶数,}\\ 0, & \text{如果 } n \text{ 是奇数.}\end{cases}$$
这个等式用(1)来证同样是不容易的.

上面这种证明方法对我们有些什么启示？回到等式(4)，这个等式实际上表达了两个数列
$$C_n^0,\ C_n^1,\ \cdots,\ C_n^r,\ \cdots,\ C_n^n\tag{15}$$
$$C_m^0,\ C_m^1,\ \cdots,\ C_m^r,\ \cdots,\ C_m^m\tag{16}$$
之间的一种关系，但直接从这两个数列本身出发来证明(4)有困难. 于是我们分别以(15)、(16)为系数作多项式
$$C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^rx^r+\cdots+C_n^nx^n=(1+x)^n,$$
$$C_m^0+C_m^1x+\cdots+C_m^rx^r+\cdots+C_m^mx^m=(1+x)^m,$$

多项式$(1+x)^n$和数列

$$C_n^0,\ C_n^1,\ \cdots,\ C_n^r,\ \cdots,\ C_n^n$$

之间是一一对应的. 例如$(1+x)^3$和数列

$$1,\ 3,\ 3,\ 1$$

相对应;多项式$(1+x)^5$和数列

$$1,\ 5,\ 10,\ 10,\ 5,\ 1$$

相对应. 根据这种对应, 我们把处理数列(15)、(16)之间的关系转变为处理与它们相对应的多项式之间的关系, 从而使问题得以简化.

这种处理问题的方法在数学中是常用的. 当某个对象甲比较难于处理时, 我们设法作适当的变换, 把对象甲变换为乙,使得乙便于处理. 对乙处理完毕后,把所得的结果再变换回去,就得到了关于对象甲的结果. 用对数作计算工具,实际上就是基于这种变换的思想:要计算两个数$x$、$y$的乘积,我们先不直接处理$x$、$y$, 而是把它们变换为相应的对数$\lg x$、$\lg y$, 并求它们的和$\lg x+\lg y$, 由于

$$\lg(xy)=\lg x+\lg y,$$

实际上我们已经算出了$\lg(xy)$, 再变换回去,即求反对数, 就得到$xy$. 这样一来,通过

$$x\to\lg x,\ y\to\lg y$$

的变换,把乘法运算变成了加法运算,使计算得以简化.

数列

$$C_n^0,\ C_n^1,\ \cdots,\ C_n^r,\ \cdots,\ C_n^n \tag{15}$$

可以看成是由函数$(1+x)^n$"产生"的,因此,称$(1+x)^n$为数列(15)的母函数或生成函数.上面的方法就是把数列(15)、(16)变换成它们的母函数, 通过母函数的运算再反过来获得数列本身的性质. 读者不妨根据这种想法, 再推导几个关于组合

数 $C_n^r$ 的新关系式.

一般来说,我们称多项式

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

为数列 $$a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$$

的母函数. 例如数列

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ n+1$$

的母函数就是多项式

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+(n+1)x^n.$$

能不能用母函数的方法证明(2)、(3)两个等式呢? 考察数列

$$C_n^n,\ C_n^{n-1},\ \cdots,\ C_n^r,\ \cdots,\ C_n^0 \tag{16}$$

的母函数

$$C_n^n+C_n^{n-1}x+C_n^{n-2}x^2+\cdots+C_n^{n-r}x^r+\cdots+C_n^0x^n,$$

提出因子 $x^n$, 上式变为

$$C_n^n+C_n^{n-1}x+C_n^{n-2}x^2+\cdots+C_n^{n-r}x^r+\cdots+C_n^0x^n$$

$$=x^n\left(C_n^n\frac{1}{x^n}+C_n^{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}+C_n^{n-2}\frac{1}{x^{n-2}}+\cdots+C_n^{n-r}\frac{1}{x^{n-r}}\right.$$

$$\left.+\cdots+C_n^0\right)=x^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n=(1+x)^n$$

这就是说,数列(15)和(16)的母函数是相同的,因而这两数列完全一样,由此即得

$$C_n^r=C_n^{n-r}.\quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

(3)的证明留给读者做练习.

此外,如果母函数 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 能用一个简单的式子表示出来,那末通过对 $x$ 取若干特定的数值,便能得到数列 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ 的若干关系式. 例如,在等式

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$$

中命 $x=1$, 即得

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n.$$

命 $x=-1$, 得

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^nC_n^n=0.$$

若命 $x=3$, 则得

$$C_n^0+3C_n^1+3^2C_n^2+\cdots+3^nC_n^n=4^n.$$

通过 $x$ 的其它数值,还可得到很多类似的等式.

当然,并不是所有的组合等式都能用母函数的方法来证,而是对某些类型的等式比较有效. 对于另外一些类型的组合等式, 还要利用组合数本身的性质来做. 读者可以在习题一中找到不少这方面的例子.

## 习 题 一

1. 利用二项式定理证明

$$1+2C_n^1+2^2C_n^2+2^3C_n^3+\cdots+2^{n-1}C_n^{n-1}+2^n=3^n.$$

2. 证明 若 $n$ 为偶数,则

$$C_n^1+C_n^3+\cdots+C_n^{n-1}=2^{n-1};$$

若 $n$ 为奇数,则

$$C_n^1+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^{n-1}.$$

3. 证明 $C_n^k=\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$.

4. 证明 $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=n2^{n-1}$.

5. 证明

$$C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+\cdots+(n+1)C_n^n=2^{n-1}(n+2).$$

6. 证明

$$C_n^0+3C_n^1+5C_n^2+7C_n^3+\cdots+(2n+1)C_n^n=2^n(n+1).$$

7. 证明

$$C_n^1-2C_n^2+3C_n^3-\cdots+(-1)^{n-1}nC_n^n=0. \quad (n>1)$$

**8.** 证明

$$1+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\cdots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

**9.** 证明

$$C_n^0-\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2-\frac{1}{4}C_n^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n=\frac{1}{n+1}.$$

**10.** 证明

$$2C_n^0+\frac{2^2}{2}C_n^1+\frac{2^3}{3}C_n^2+\cdots+\frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}.$$

**11.** 证明

$$C_n^1-\frac{1}{2}C_n^2+\frac{1}{3}C_n^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}C_n^n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

**12.** 证明

$$\frac{1}{m+1}C_n^0-\frac{1}{m+2}C_n^1+\frac{1}{m+3}C_n^2-\cdots+\frac{(-1)^n}{m+n+1}C_n^n$$

$$=\frac{n!m!}{(n+m+1)!}.$$

**13.** 证明

$$C_n^0C_n^1+C_n^1C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}C_n^n=\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}.$$

**14.** 证明

$$C_n^0C_n^r+C_n^1C_n^{r+1}+\cdots+C_n^{r-1}C_n^n=\frac{(2n)!}{(n-r)!(n+r)!}.$$

**15.** 试用母函数方法证明

$$C_n^r+C_n^{r+1}=C_{n+1}^{r+1}.$$

**16.** 试根据组合数 $C_n^r$ 的定义，证明

$$C_n^0C_m^r+C_n^1C_m^{r-1}+\cdots+C_n^rC_m^0=C_{n+m}^r.$$

# 二、形式幂级数及其运算

再研究一个关于组合数的等式.

设 $p$, $q$, $n$ 是任意正整数, 证明

$$C_p^p C_{q+n}^q + C_{p+1}^p C_{q+n-1}^q + C_{p+2}^p C_{q+n-2}^q + \cdots + C_{p+n}^p C_q^q = C_{p+q+n+1}^{p+q+1} \tag{17}$$

注意到 $C_n^r = C_n^{n-r}$, 上式也可写成

$$C_p^0 C_{q+n}^n + C_{p+1}^1 C_{q+n-1}^{n-1} + C_{p+2}^2 C_{q+n-2}^{n-2} + \cdots + C_{p+n}^n C_q^0 = C_{p+q+n+1}^n.$$

等式(17)是数列

$$C_p^p,\ C_{p+1}^p,\ \cdots,\ C_{p+n}^p \tag{18}$$

和数列

$$C_q^q,\ C_{q+1}^q,\ \cdots,\ C_{q+n}^q \tag{19}$$

之间的一个关系式. 如果用上节的办法, 考虑它们的母函数:

$$C_p^p + C_{p+1}^p x + \cdots + C_{p+n}^p x^n,$$

$$C_q^q + C_{q+1}^q x + \cdots + C_{q+n}^q x^n,$$

但这两个母函数并没有明显的关系. 因此想从这两个母函数出发来推导公式(17)是有困难的. 实际上, 如果我们不去考虑(18)、(19)的母函数, 而索性研究分别由(18)、(19)构成的无穷数列

$$C_p^p,\ C_{p+1}^p,\ \cdots,\ C_{p+n}^p,\ \cdots \tag{20}$$

$$C_q^q,\ C_{q+1}^q,\ \cdots,\ C_{q+n}^q,\ \cdots \tag{21}$$

的母函数, 等式(17)反而很容易证明.

这样就产生一个新问题, 什么是无穷数列的母函数? 仿

照有限数列母函数的定义，无穷数列

$$a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots \tag{22}$$

的母函数应该是一个"无穷次多项式"：

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots, \tag{23}$$

我们把这种"无穷次多项式"叫做*形式幂级数*. 这个名词是这样得来的：无穷个数相加的式子称之为级数，而(23)的每项都是幂函数 $a_nx^n$，故称之为幂级数；所以要加上"形式"两字，是因为我们这儿并不讨论它的收敛、发散等问题，而是把整个幂级数看作一个对象加以研究和使用.

现在给出无穷数列(以下简称数列)的母函数的明确定义.

**定义 1** 设

$$a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots \tag{22}$$

是一个给定的数列，我们称形式幂级数

$$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{23}$$

为数列(22)的母函数.

例如，数列

$$1,\ 1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ \cdots$$

的母函数是 $$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,$$

数列 $$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots$$

的母函数是 $$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots.$$

因为下面经常要和形式幂级数打交道，为方便起见，我们引进求和记号 $\Sigma$(读作西格马).

我们把和式

$$c_1+c_2+\cdots+c_n$$

简记为 $$\sum_{i=1}^{n} c_i,$$

这里 $c_i$ 表示一般项, $\sum$ 上下的数字表示 $i$ 从 1 加到 $n$, $i$ 是求和指标, 只起辅助作用, 也可以换成别的记号. 例如

$$1+2+\cdots+n=\sum_{i=1}^{n}i=\sum_{j=1}^{n}j,$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{i=1}^{n}i^2=\sum_{k=1}^{n}k^2,$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}$$
$$=\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{n=1}^{99}\frac{1}{n(n+1)}.$$

利用这种记号, 多项式 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 便可简记为

$$\sum_{k=0}^{n}a_kx^k,$$

二项式定理可简写为

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k,$$

上节的公式(4)和(15)可简写为

$$\sum_{k=0}^{r}C_n^kC_m^{r-k}=C_{n+m}^r,$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(C_n^k)^2=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}C_n^{\frac{n}{2}}, & \text{如果 } n \text{ 是偶数,}\\ 0, & \text{如果 } n \text{ 是奇数.}\end{cases}$$

本节开头提出的公式(17)便可写为

$$\sum_{k=0}^{n}C_{p+k}^{p}C_{q+n-k}^{q}=C_{p+q+n+1}^{p+q+1}. \qquad (17)$$

数列$\{a_n\}$的母函数

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

可简写为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

在下面的讨论中, 有时需要更换求和指标, 这时必须注意同时更换求和的上下限. 例如

$$\sum_{n=0}^{s} a_n x^n = \sum_{n=2}^{s+2} a_{n-2} x^{n-2} = \sum_{n=1}^{s+1} a_{n-1} x^{n-1}.$$

我们的目的是要通过母函数来研究数列本身的性质．象前面已经做过的那样，要做到这一点，母函数之间必须进行运算．而无穷数列的母函数是形式幂级数，形式幂级数如何运算呢？因为形式幂级数对我们来说完全是新的对象，什么是两个形式幂级数的和、差、积、商，我们是不知道的，因此必须重新定义．

**定义 2** 两个形式幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

当而且只当 $a_n = b_n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$
时才认为是相等的．

因此，数列$\{a_n\}$和它的母函数之间是一一对应的，不同的数列，对应的母函数也不相同．

**定义 3** 两个形式幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

的和是一个以 $a_n + b_n$ 为系数的形式幂级数，即

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n.$$

按照这个定义，数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的母函数的和就是数列$\{c_n + b_n\}$的母函数．例如我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n + n^2) x^n.$$

**定义 4** 常数 $\alpha$ 和形式幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的乘积是一个以 $\alpha a_n$ 为系数的形式幂级数，即

$$\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n)x^n.$$

例如 $$3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}3(n+1)x^n.$$

从定义 3, 4 得知

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-b_n)x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)x^n.$$

**定义 5** 两个形式幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad \sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

的积定义为形式幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,$$

其中系数 $c_n$ 为

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k},\tag{24}$$

即 $$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n.$$

[例 1] 计算 $\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)^2$.

**解** 设

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad \sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,$$

所以 $$a_n=1,\quad b_n=1,\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

因而 $$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$$

$$=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n+1\text{个}}=n+1.$$

于是 $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

[例 2] 计算 $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n\right)$.

**解** 设

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

则 $b_n=1(n=0, 1, 2, \cdots)$，于是

$$c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}=\sum_{k=0}^{n} a_k=a_0+a_1+\cdots+a_n,$$

所以 $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0+a_1+\cdots+a_n)x^n.$$

从这个例子可以知道，如果数列

$$a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

的母函数是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，那么数列

$$a_0,\ a_0+a_1,\ a_0+a_1+a_2,\ \cdots,\ a_0+a_1+\cdots+a_n,\ \cdots$$

的母函数便是

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right).$$

而 $$a_0,\ -(a_0+a_1),\ a_0+a_1+a_2,\ \cdots,$$
$$(-1)^n(a_0+a_1+\cdots+a_n),\ \cdots$$

的母函数是 $$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right).$$

这些事实在下面的讨论中将要用到.

形式幂级数的乘法运算定义得似乎有点不自然，其实它就是多项式乘法运算的推广. 设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 分别是 5 次和 7 次多项式:

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_5x^5,\ Q(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_7x^7,$$

它们的乘积是

$$P(x)Q(x)=(a_0+a_1x+\cdots+a_5x^5)(b_0+b_1x+\cdots+b_7x^7)$$
$$=\sum_{k=0}^{12}c_kx^k,$$

容易看出，乘积中 $x^4$ 的系数是

$$c_4=a_0b_4+a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+a_4b_0=\sum_{k=0}^{4}a_kb_{4-k},$$

$x^5$ 的系数是

$$c_5=a_0b_5+a_1b_4+\cdots+a_5b_0=\sum_{k=0}^{5}a_kb_{5-k},$$

但 $x^8$ 的系数是

$$c_8=a_1b_7+a_2b_6+a_3b_5+a_4b_4+a_5b_3,$$

而不再是 $\displaystyle\sum_{k=0}^{8}a_kb_{8-k}=a_0b_8+a_1b_7+\cdots+a_8b_0,$

这是因为 $P(x)$, $Q(x)$ 中根本没有 $a_6$, $a_7$, $a_8$, $b_8$ 这些系数. 但在形式幂级数中，项数是无穷的，因此把 $c_n$ 定义成(24)的样子是合理的，它就是多项式乘法运算的推广.

有了乘法运算，就可定义除法运算.

**定义 6** 设

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ g=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n,\ h=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

是三个形式幂级数. 如果 $f=gh$, 就称 $f$ 被 $g$ 除的商是 $h$, 记为

$$\frac{f}{g}=h.$$

[例 3] 把 1 和 $1-x$ 都看成形式幂级数，计算它们的商 $\dfrac{1}{1-x}$.

**解** 设商为 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$，只要定出 $c_n\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 就行了. 由于

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

按定义 6，这就是说

$$1=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{25}$$

右端可改写为

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n-\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$
$$=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-c_{n-1})x^n,$$

代入(25)得 $$1=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-c_{n-1})x^n,$$

比较两边同幂次的系数，得

$$c_0=1,\quad c_n-c_{n-1}=0.\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

即 $$c_n=c_{n-1},\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

由 $c_0=1$，立刻得到

$$c_1=c_2=c_3=\cdots=c_n=\cdots=1.$$

因而得展开式

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots. \tag{26}$$

这个展开式在下面的讨论中十分重要.

要注意的是(26)式中的相等是形式幂级数的相等. 在它的两边并不能用 $x$ 的具体值代入. 例如，要是用 $x=2$ 代入，就会得出

$$-1=1+2+4+8+\cdots+2^n+\cdots$$

这样的荒谬结果. 这是形式幂级数与多项式的本质差别.

现在设 $f=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ g=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$

是两个已知的幂级数，如何求它们的商 $\frac{f}{g}$？不妨设

$$h=\frac{f}{g}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,$$

按定义 $f=gh$，即

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}b_kc_{n-k}\right)x^n,$$

比较系数，得

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}b_kc_{n-k}.\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

即 $a_0=b_0c_0,\ a_1=b_0c_1+b_1c_0,\ a_2=b_0c_2+b_1c_1+b_2c_0,\ \cdots,$

$$a_n=b_0c_n+b_1c_{n-1}+\cdots+b_nc_0,\ \cdots,$$

如果 $b_0\neq 0$，那么

$$c_0=\frac{a_0}{b_0},\ c_1=\frac{a_1-b_1c_0}{b_0},\ c_2=\frac{a_2-(b_1c_1+b_2c_0)}{b_0},\cdots,$$

$$c_n=\frac{a_n-(b_1c_{n-1}+\cdots+b_nc_0)}{b_0},\ \cdots. \tag{27}$$

这就是由 $f$, $g$ 计算商 $h$ 的系数的递推公式.

如果 $b_0=0$，而 $a_0\neq 0$，这时不论 $c_0$ 取何值都不能使

$$a_0=b_0c_0$$

成立，因而 $\frac{f}{g}$ 就不再是形式幂级数了. 也就是说，两个形式幂级数的商并不一定是形式幂级数，这正好象两个多项式的商不一定是多项式一样，是在意料之中的.

[例 4] 计算商 $\frac{1}{1-rx}$，$r$ 是任一实数.

**解** 把 1 和 $1-rx$ 都看成形式幂级数：

$$1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

$$1-rx=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+\cdots,$$

由此得 $a_0=1,\ a_1=a_2=\cdots=a_n=\cdots=0;$

$$b_0=1,\ b_1=-r,\ b_2=b_3=\cdots=b_n=\cdots=0,$$

代入递推公式(27)得

$$c_0=1,\ c_1=r,\ c_2=r^2,\ \cdots,\ c_n=r^n,\ \cdots$$

故得展开式

$$\frac{1}{1-rx}=1+rx+r^2x^2+\cdots+r^nx^n+\cdots. \tag{28}$$

如果在(28)中取 $r=1$，就得到(26)。

从这里还可以看出，如果在(26)中用 $rx$ 代替 $x$，等式还是成立的．这种情况以后还会多次遇到，就不再一一说明了。

在下面的讨论中，需要知道1除以$(1-x)^n$所得的商．有了(26)，我们就可用数学归纳法证明下面的结论。

**定理1**

$$\frac{1}{(1-x)^n}=C_{n-1}^{n-1}+C_n^{n-1}x+C_{n+1}^{n-1}x^2+\cdots+C_{n+j-1}^{n-1}x^j+\cdots. \tag{29}$$

**证明** 当 $n=1$ 时，(29)就是(26)，定理成立．今设 $n=k$ 时，(29)成立，即

$$\frac{1}{(1-x)^k}=C_{k-1}^{k-1}+C_k^{k-1}x+C_{k+1}^{k-1}x^2+\cdots+C_{k+j-1}^{k-1}x^j+\cdots$$
$$=\sum_{j=0}^{\infty}C_{k+j-1}^{k-1}x^j,$$

于是，当 $n=k+1$ 时，

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}}=\frac{1}{(1-x)^k}\frac{1}{1-x}=\left(\sum_{j=0}^{\infty}C_{k+j-1}^{k-1}x^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}x^j\right)$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{r}C_{k+j-1}^{k-1}\right)x^r, \tag{30}$$

注意到组合数的公式

$$C_n^r+C_n^{r+1}=C_{n+1}^{r+1},$$

我们有 $\sum_{j=0}^{r}C_{k+j-1}^{k-1}=C_{k-1}^{k-1}+C_k^{k-1}+C_{k+1}^{k-1}+\cdots+C_{k+r-1}^{k-1}$

$$=(C_k^k+C_k^{k-1})+C_{k+1}^{k-1}+\cdots+C_{k+r-1}^{k-1}$$
$$=C_{k+1}^k+C_{k+1}^{k-1}+C_{k+2}^{k-1}+\cdots+C_{k+r-1}^{k-1}$$
$$=C_{k+2}^k+C_{k+2}^{k-1}+\cdots+C_{k+r-1}^{k-1}$$
$$=\cdots=C_{k+r}^k,$$

代入(30)得

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}}=\sum_{r=0}^{\infty}C_{k+r}^k x^r=C_k^k+C_{k+1}^k x+\cdots+C_{k+r}^k x^r+\cdots.$$

**这就证明了(29)当$n=k+1$时也成立．根据数学归纳法原理，(29)对所有自然数$n$成立．证明完毕．**

(29)告诉我们，数列

$$C_n^n,\ C_{n+1}^n,\ C_{n+2}^n,\ \cdots,\ C_{n+k}^n,\ \cdots$$

的母函数是

$$C_n^n+C_{n+1}^n x+C_{n+2}^n x^2+\cdots+C_{n+k}^n x^k+\cdots=\frac{1}{(1-x)^{n+1}}.$$

利用这一事实来证明本节开头提出的等式(17)，就变得非常简单了．因为

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{p+k}^p x^k,\quad \frac{1}{(1-x)^{q+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{q+k}^q x^k,$$

两式相乘得

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}}\frac{1}{(1-x)^{q+1}}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}C_{p+k}^p x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}C_{q+k}^q x^k\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}C_{p+k}^p C_{q+n-k}^q\right)x^n, \tag{31}$$

另一方面

$$\frac{1}{(1-x)^{p+q+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}C_{p+q+n+1}^{p+q+1}x^n, \tag{32}$$

比较(31)、(32),即得

$$\sum_{k=0}^{n}C_{p+k}^{p}C_{q+n-k}^{q}=C_{p+q+n+1}^{p+q+1}.$$

这就是要证明的等式(17).

由此可见,在证得了公式(29)以后,(17)的证明就和(4)的证明一样简单.

根据形式幂级数的乘法运算,还可定义形式幂级数的开方运算.

**定义7** 设

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ \ (a_0>0);\ g=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\ \ (b_0>0)$$

是两个形式幂级数,如果 $f^2=g$,就称 $f$ 是 $g$ 的平方根,记为

$$f=\sqrt{g}.$$

作为一个重要的例子,我们证明

**定理2**

$$\sqrt{1+x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n-1}}C_{2n-2}^{n-1}x^n \tag{33}$$

**证明** 记

$$a_0=1,\ a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n-1}}C_{2n-2}^{n-1},\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

(33)可以简写为

$$\sqrt{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

因此只要证明

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)^2=1+x \tag{34}$$

就行了．根据乘法运算的定义，

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n,$$

其中

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \tag{35}$$

显然 $d_0 = a_0^2 = 1,\ d_1 = a_0 a_1 + a_1 a_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$

如果能证明 $d_n = 0 \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots),$

(34)就成立，因而(33)也成立．把 $a_n$ 的表达式代入(35)，得

$$\begin{aligned}
d_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = a_0 a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} + a_n a_0 \\
&= 2a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} = 2\,\frac{(-1)^{n-1}}{n 2^{2n-1}}\, C_{2n-2}^{n-1} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k 2^{2k-1}} C_{2k-2}^{k-1} \frac{(-1)^{n-k-1}}{(n-k)\, 2^{2n-2k-1}}\, C_{2(n-k)-2}^{n-k-1} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^{2n-2}}\, C_{2(n-1)}^{n-1} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-2}}{2^{2n-2}}\, \frac{1}{k(n-k)}\, C_{2(k-1)}^{k-1} C_{2(n-k-1)}^{n-k-1} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}} \left\{ \frac{1}{n}\, C_{2(n-1)}^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)}\, C_{2(k-1)}^{k-1} C_{2(n-k-1)}^{n-k-1} \right\},
\end{aligned}$$

这样，证明 $d_n = 0$ 就归结为证明

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)}\, C_{2(k-1)}^{k-1} C_{2(n-k-1)}^{n-k-1} = \frac{1}{n}\, C_{2(n-1)}^{n-1}, \qquad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots) \tag{36}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{k(n-k)}\, C_{2(k-1)}^{k-1} C_{2(n-k-1)}^{n-k-1} = C_{2(n-1)}^{n-1}, \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots) \tag{37}$$

注意
$$\frac{n}{k(n-k)}=\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k},$$
上式左端可以改写为
$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{k(n-k)}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(n-k-1)}^{n-k-1}\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right)C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(n-k-1)}^{n-k-1}\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(n-k-1)}^{n-k-1}\\
&\quad+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(n-k-1)}^{n-k-1},
\end{aligned}\tag{38}$$
在(38)的第二个和式中，命 $n-k=j$，得
$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(n-k-1)}^{n-k-1}=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}C_{2(n-j-1)}^{n-j-1}C_{2(j-1)}^{j-1},$$
因此(38)右端的两个和是相同的，于是有
$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{k(n-k)}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(n-k-1)}^{n-k-1}=2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(n-k-1)}^{n-k-1},\tag{39}$$
这样一来，(37)就变成
$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(n-k-1)}^{n-k-1}=\frac{1}{2}C_{2(n-1)}^{n-1},\quad (n=2,\ 3,\ \cdots)\tag{40}$$
我们用数学归纳法证明(40)成立.

$n=2$ 时，等式显然成立．今设 $n=m$ 时，(40)成立，即
$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(m-k-1)}^{m-k-1}=\frac{1}{2}C_{2(m-1)}^{m-1},\tag{41}$$
要证明 $n=m+1$ 时，(40)也成立．当 $n=m+1$ 时，(40)左端为

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(m-k)}^{m-k}=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}\ C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(m-k)}^{m-k}+\frac{1}{m}C_{2(m-1)}^{m-1},\quad(42)$$

注意到

$$C_{2(m-k)}^{m-k}=\frac{(2m-2k)!}{(m-k)!(m-k)!}$$

$$=\frac{(2m-2k)(2m-2k-1)}{(m-k)^{2}}\ \frac{(2m-2k-2)!}{(m-k-1)!(m-k-1)!}$$

$$=2\left(2-\frac{1}{m-k}\right)C_{2(m-k-1)}^{m-k-1},$$

代入(42)得

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(m-k)}^{m-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{2}{k}\left(2-\frac{1}{m-k}\right)C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(m-k-1)}^{m-k-1}+\frac{1}{m}C_{2(m-1)}^{m-1}$$

$$=4\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}\ C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(m-k-1)}^{m-k-1}$$

$$-2\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k(m-k)}\ C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(m-k-1)}^{m-k-1}+\frac{1}{m}\ C_{2(m-1)}^{m-1},$$

利用(39)和归纳假定成立的(41)，得

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\ C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(m-k)}^{m-k}$$

$$=4\left(1-\frac{1}{m}\right)\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}\ C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(m-k-1)}^{m-k-1}+\frac{1}{m}C_{2(m-1)}^{m-1}$$

$$=4\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{1}{2}C_{2(m-1)}^{m-1}+\frac{1}{m}C_{2(m-1)}^{m-1}$$

$$=\left(2-\frac{1}{m}\right)C_{2(m-1)}^{m-1}=\frac{2m-1}{m}\ \frac{(2m-2)!}{(m-1)!(m-1)!}$$

$$=\frac{1}{2}\ \frac{2m(2m-1)}{m^{2}}\ \frac{(2m-2)!}{(m-1)!(m-1)!}$$

$$=\frac{1}{2}\ \frac{(2m)!}{m!m!}=\frac{1}{2}\ C_{2m}^{m}.$$

这就证明了(40)当 $n=m+1$ 时也成立，因而(37)成立，所以展开式(33)成立.

展开式(33)在高等数学中是不难证明的. 由于我们不假定读者具有微积分的知识，纯粹从形式幂级数的乘法出发来做，证明显得困难了. 在证明中，关键是证明等式(36)成立，这是关于组合数的一个有趣的等式. 如果我们假定等式(33)成立，那么用母函数的方法，很容易证明(36)成立. 但现在是为了证明(33)而去证明(36)，当然不能用母函数方法，而是用数学归纳法，证明就困难多了. 这个例子从反面告诉我们，母函数方法在处理某些问题时是强有力的.

## 习 题 二

**1**. 写出下列和式:

(i) $\sum\limits_{k=1}^{10} k^2$; (ii) $\sum\limits_{n=0}^{9} \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$; (iii) $\sum\limits_{k=0}^{8} a_k b_{8-k}$.

**2**. 证明

(i) $\sum\limits_{k=1}^{n} ca_k = c\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$; (ii) $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k+b_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$.

**3**. 确定下列数列的母函数:

( i ) $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^n, \cdots, a_n=(-1)^n$;

( ii ) $1, 2, 3, 4, \cdots, n+1, \cdots, a_n=n+1$;

(iii) $0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots, \quad a_n=n$;

(iv) $1, -2, 3, -4, \cdots, (-1)^n(n+1), \cdots, a_n=(-1)^n(n+1)$;

( v ) $1, -2, 2^2, -2^3, \cdots, (-1)^n 2^n, \cdots, \quad a_n=(-1)^n 2^n$;

( vi ) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2^2}, \dfrac{1}{2^3}, \cdots, \dfrac{1}{2^n}, \cdots, \quad a_n=\dfrac{1}{2^n}$;

(vii) $1, 5, 5^2, 5^3, \cdots, 5^n, \cdots, \quad a_n=5^n$;

(viii) $0, 1\cdot2, 2\cdot3, 3\cdot4, \cdots, n(n+1), \cdots, \quad a_n=n(n+1)$;

( ix ) $0, 0, 0, -1, 1, -1, 1, \cdots, \quad a_n=\begin{cases} 0, & n=0, 1, 2, \\ (-1)^n, & n\geqslant 3; \end{cases}$

(x) $5, 6, 7, 8, \cdots, n+5, \cdots,\quad a_n=n+5.$

**4**. 证明 $f(x)=\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ 是数列 $a_n=n^2$ 的母函数.

**5**. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 如果

(i) $b_0=0,\ b_n=a_{n-1}$; (ii) $c_n=a_{n+1}$;

问数列 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 的母函数是什么?

**6**. 设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n,\quad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}x^n$$

证明

$$f(x)g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}x^n,$$

其中

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a_k b_{n-k}.$$

**7**. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n$ (规定 $0!=1$), 证明

$$\frac{1}{f(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n.$$

**8**. 根据形式幂级数的乘法定义, 直接证明

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)^3=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n.$$

**9**. 把习题一的第 4 题至第 12 题的等式用记号 $\Sigma$ 表示出来, 然后证明之.

**10**. 用母函数方法证明

$$C_n^n+C_{n+1}^n+\cdots+C_{n+m}^n=C_{n+m+1}^{n+1}.$$

# 三、三类组合问题

在上面两节中，母函数的方法是这样运用的：为了证明数列

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,$$

$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n,\ \cdots$$

之间的某种关系，我们不直接从数列本身出发，而是去研究它们的母函数之间的关系，通过母函数的关系再反过来得到数列之间的关系.

在这一节以及下面几节，母函数方法运用的方式有所不同：为了寻找满足某种条件的数列

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,$$

我们不直接去找数列本身，而是根据$\{a_n\}$所满足的条件找出它的母函数，然后再把母函数展开成形式幂级数，展开式中的系数就是要求的数列$\{a_n\}$.

我们从三种不同类型的组合问题谈起.

**问题 I** 在 $a, b, c, d, e$ 五个字母中任取三个，不许重复，问有多少种不同的取法？

**问题 II** 在 $a, b, c, d, e$ 五个字母中任取三个，允许重复，问有多少种不同的取法？

**问题 III** 口袋中放着 12 个字母，其中有 3 个 $a$，4 个 $b$，5 个 $c$，从中任取 10 个字母，问有多少种不同的取法？

问题 I 在中学课本中讨论过．它的答案很简单，共有

$$C_5^3=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}=10$$

种不同的取法，这是读者熟悉的.

问题 II 就比较复杂了. 因为允许重复，象

$$aac,\ abb,\ ccc,\ ded$$

都是允许的不同取法. 那么总共有多少种呢？我们设法把它化为问题 I 的情形来处理. 为了便于说明问题，把 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 五个字母分别换成 1, 2, 3, 4, 5 五个数字，这对问题本身是没有影响的. 现在把所有可能的组合都写出来:

$$434,\ 512,\ 333,\ \cdots,$$

再把每个组合按数字大小由小到大排好:

$$344,\ 125,\ 333,\ \cdots, \tag{43}$$

然后在每个组合的每个数上分别加上 0, 1, 2, 这些组合就变成

$$356,\ 137,\ 345,\ \cdots, \tag{44}$$

这就是从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 七个数字中不许重复地任取三个的组合的全体. 为什么？因为如果任取这样一个组合，例如 167，在它的每个数字上分别减去 0, 1, 2，就得到 155，这是(43)中的一个组合. 这说明 167 就是由(43)中的一个组合 155 通过分别加上 0, 1, 2 的办法得到的，因而在(44)中. 这就证明了(44)是从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 七个数字中不许重复地任取三个的组合的全体，它的总数等于

$$C_7^3=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!}=35.$$

这当然也就是(43)中所有组合的个数. 于是得到结论: 从 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 五个字母中任取三个，如果允许重复，那么所有可能不同的组合数等于

$$C_7^3=35.$$

把这个证明方法推而广之，就得到

**定理 3** 从 $n$ 个不同的物体中任取 $r$ 个，如果允许重复，那么所有可能不同取法的总数为

$$C_{n+r-1}^{r}=\frac{(n+r-1)(n+r-2)\cdots n}{r!}.$$

请读者补出定理的证明.

再来解问题 III. 它比问题 II 更复杂，因为三个字母虽然可以重复，但重复的次数是有限制的，例如字母 $b$ 最多重复四次，因为一共只有四个 $b$; $a$ 最多重复三次，$c$ 最多重复五次. 而在问题 II 中，字母的重复是没有这种限制的. 根据这种区别，我们把问题 II 叫做允许无限重复的组合问题，问题 III 叫做允许有限重复的组合问题，问题 I 就叫做不许重复的组合问题.

为了解决问题 III，我们先把它作为允许无限重复的组合问题来处理，即假定 $a, b, c$ 的重复是没有限制的. 于是根据定理 3，每次取 10 个字母，所有可能不同取法的总数是

$$s=C_{3+10-1}^{10}=C_{12}^{10}=\frac{12\cdot 11}{2}=66.$$

在这 66 个组合中，有许多是不符合问题 III 的要求的. 例如

$$aaaaabbbbb, \quad cccccccccc$$

都不符合问题的要求，因为问题 III 规定，组合中字母 $a$ 不能超过三个，$b$ 不能超过四个，$c$ 不能超过五个. 因此，必须把这些不符合要求的组合减去. 那么不符合要求的组合有多少个？为了确切地算出这个数目，我们引进一些记号：在上述 66 个组合中，如果某个组合包含字母 $a$ 多于三个，就说这组合具有性质 $P_1$; 如果某个组合包含字母 $b$ 多于四个，就说这组合具有性质 $P_2$; 如果某个组合包含字母 $c$ 多于五个，就说这组合具有性质 $P_3$. 例如，组合



$$aaaaaaaabc$$

具有性质 $P_1$，而组合

$$aaaabbbbbc$$

既具有性质 $P_1$，也具有性质 $P_2$，但不具有性质 $P_3$. 凡具有性质 $P_i(i=1, 2, 3)$的组合的全体记作 $A_i(i=1, 2, 3)$. 那么 $A_1$, $A_2$, $A_3$ 中的组合都不符合问题 III 的要求，因此必须把它们从 66 个组合中清除出去. 那么 $A_1$ 中有多少个组合呢？因为 $A_1$ 中的每个组合，$a$ 的出现至少是四次，把这四个 $a$ 拿掉，剩下的是六个字母的一个组合，这是允许 $a$, $b$, $c$ 无限重复的一种组合；反之，如果我们任取一个如上的六个字母的组合，再加上四个 $a$，就得到 $A_1$ 中的一个组合. 因此，$A_1$ 中组合的数目 $s_1$ 就等于 $a$, $b$, $c$ 三个字母在允许无限重复的情形下，任取六个的不同的组合数，即

$$s_1=C_{3+6-1}^6=C_8^6=\frac{8\cdot 7}{2}=28,$$

同样道理，如果分别用 $s_2$, $s_3$ 记 $A_2$, $A_3$ 中组合的数目，那么

$$s_2=C_{3+5-1}^5=C_7^5=\frac{7\cdot 6}{2}=21,$$

$$s_3=C_{3+4-1}^4=C_6^4=\frac{6\cdot 5}{2}=15,$$

在 66 个组合中减去上面那些不符合要求的，还有

$$66-(28+21+15)=66-64=2.$$

我们很快就发现，这样做减得太多了. 因为在 66 个组合中，有的组合既有性质 $P_1$，又有性质 $P_2$，在减法中，这样的组合在 $A_1$ 中被减去一次，在 $A_2$ 中又被减去一次，总共减去两次，因此必须补上. 为此，我们要计算一下既有性质 $P_1$，又有性质 $P_2$ 的组合有多少. 显然，每个这样的组合中，$a$ 至少出现四次，$b$ 至少出现五次，如果去掉四个 $a$ 和五个 $b$，那么

只剩下一个字母；反之，在一个字母上再添加四个 $a$ 和五个 $b$，就能得到一个既有性质 $P_1$、又有性质 $P_2$ 的组合. 因此，如果用 $s_{12}$ 记既有性质 $P_1$、又有性质 $P_2$ 的组合的数目，那么 $s_{12}$ 就等于三个字母中取一个的组合数，即

$$s_{12}=C_3^1=3.$$

同样道理，如果把既有性质 $P_1$、又有性质 $P_3$ 的组合的数目记为 $s_{13}$；把既有性质 $P_2$、又有性质 $P_3$ 的组合的数目记为 $s_{23}$，那么

$$s_{13}=1, \quad s_{23}=0,$$

把这些多减去的补上去，就得

$$66-(28+21+15)+(3+1+0)=6.$$

但这样做又补多了，因为在减法中把同时具有性质 $P_1$, $P_2$, $P_3$ 的组合减了三次，多减了两次；而刚才的加法中却把这样的组合加了三次，因此必须再减去一次. 但在我们的问题中，同时具有性质 $P_1$、$P_2$、$P_3$ 的组合根本不存在，也就不必再减了. 综上所述，问题 III 的正确答案是有 6 种不同的取法，它们是：

$$aaabbbbccc,\ aaabbbcccc,\ aaabbccccc,$$
$$aabbbccccc,\ aabbbbcccc,\ abbbbccccc.$$

三类组合问题都解决了，但解决的方法很不相同，特别是允许有限重复的情形更难处理. 下面我们将看到，利用母函数的概念，这三类组合问题可以得到统一的处理，特别是允许有限重复的情形更为简单.

先用母函数的方法讨论无限重复型的组合问题. 把从 $n$ 个相异物体中允许无限重复地取出 $r$ 个物体的方法的总数记为 $a_r$，我们来计算数列

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_r,\ \cdots$$

的母函数．考虑下面 $n$ 个形式幂级数的乘积：

$$(1+x+x^2+\cdots+x^r+\cdots)(1+x+x^2+\cdots+x^r+\cdots)\\ \cdots(1+x+x^2+\cdots+x^r+\cdots). \qquad (45)$$

它的展开式中每一项 $x^r$ 一定是这样构成的：

$$x^{m_1}x^{m_2}\cdots x^{m_n}=x^r, \quad m_1+m_2+\cdots+m_n=r$$

其中 $x^{m_1}$, $x^{m_2}$, $\cdots$, $x^{m_n}$ 分别取自第一个、第二个、…、第 $n$ 个括弧．如果我们把第一个括弧与物体 $A_1$ 对应，第二个括弧与物体 $A_2$ 对应，…，第 $n$ 个括弧与物体 $A_n$ 对应；把从第 $j$ 个括弧中取出项 $x^{m_j}$ 理解为"第 $j$ 个物体 $A_j$ 被取了 $m_j$ 次"．由于

$$m_1+m_2+\cdots+m_n=r,$$

所以 $x^r$ 实际上对应了从 $n$ 个物体中取出 $r$ 个物体的一种取法，其中物体 $A_1$ 重复了 $m_1$ 次，$A_2$ 重复了 $m_2$ 次，…，$A_n$ 重复了 $m_n$ 次．既然每项 $x^r$ 都对应一种取法，那么(45)中 $x^r$ 项的总数，即 $x^r$ 的系数，就是从 $n$ 个物体 $A_1$, $A_2$, $\cdots$, $A_n$ 中允许重复地取出 $r$ 个物体的方法的总数，即为 $a_r$．因而得展开式：

$$(1+x+x^2+\cdots+x^r+\cdots)(1+x+x^2+\cdots+x^r+\cdots)\\ \cdots(1+x+x^2+\cdots+x^r+\cdots)=\sum_{r=0}^{\infty}a_rx^r.$$

这说明(45)就是数列$\{a_r\}$的母函数．由于

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x},$$

因而$\{a_r\}$的母函数是

$$\underbrace{\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x}\cdots\frac{1}{1-x}}_{n\text{个}}=\frac{1}{(1-x)^n},$$

根据定理 1,

$$\frac{1}{(1-x)^n}=C_{n-1}^{n-1}+C_n^{n-1}x+\cdots+C_{n+r-1}^{n-1}x^r+\cdots,$$

由此即得 $$a_r=C_{n+r-1}^{n-1}=C_{n+r-1}^r.$$

这就是在前面已经得到过的计算无限重复型组合数的公式，不过现在是用母函数的方法获得的.

用母函数的方法处理有限重复型的组合问题尤其简单. 还以问题 III 为例，我们把问题提得更一般些：口袋中放着 12 个字母，其中有 3 个 $a$，4 个 $b$，5 个 $c$，从中任取 $r$ 个字母，问有多少种不同的取法？

设不同的取法有 $p_r$ 种. 不难证明，数列

$$p_0,\ p_1,\ \cdots,p_r,\ \cdots \tag{46}$$

的母函数就是

$$(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4)\cdot(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5). \tag{47}$$

为什么呢？ 和上面的讨论一样，(47)的展开式中每一项 $x^r$ 必定是这样构成的：

$$x^{m_1}\cdot x^{m_2}\cdot x^{m_3}=x^r,\quad m_1+m_2+m_3=r.$$

其中 $x^{m_1}$, $x^{m_2}$, $x^{m_3}$ 分别取自第一、二、三个括弧. 如果我们让第一、二、三个括弧分别对应字母 $a$、$b$、$c$；从第一个括弧中取 $x^{m_1}$ 解释为"字母 $a$ 被取了 $m_1$ 次"，从第二个括弧中取 $x^{m_2}$ 解释为"字母 $b$ 被取了 $m_2$ 次"，从第三个括弧中取 $x^{m_3}$ 解释为"字母 $c$ 被取了 $m_3$ 次". 由于一、二、三个括弧中最高次数分别为 3, 4, 5, 因此在任一取法中，$a$ 不能超过 3 个，$b$ 不能超过 4 个，$c$ 不能超过 5 个. 这样一来，(47)的展开式中每个 $x^r$ 就对应一种 $a$、$b$、$c$ 的取法. 合并同类项之后，$x^r$ 的系数就是每次取 $r$ 个的所有可能取法的总数，即为 $p_r$. 这就证明了(47)是(46)的母函数.

因此，要解答问题 III，只要求出(47)的展开式中 $x^{10}$ 的系数就行．通过直接计算

$$
\begin{aligned}
&(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4)\\
&\quad\cdot(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)\\
&=(1+2x+3x^2+4x^3+4x^4+3x^5+2x^6+x^7)\\
&\quad\cdot(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5),
\end{aligned}
$$

即知 $x^{10}$ 的系数为

$$1+2+3=6,$$

即问题 III 有 6 种不同的取法，和前面所得结果一致，但解决的方法比前面的讨论要简单得多．

一般来说，设有 $n$ 个物体，其中有 $n_1$ 个 $A_1$，$n_2$ 个 $A_2$，…，$n_s$ 个 $A_s$，$n_1+n_2+\cdots+n_s=n$．今从这 $n$ 个物体中每次取 $r$ 个，问有多少种不同的取法？

按照上面的方法，如果用 $p_r$ 记每次取 $r$ 个的不同取法的总数，那么数列

$$p_0,\ p_1,\ \cdots,\ p_r,\ \cdots$$

以函数

$$
\begin{aligned}
&(1+x+x^2+\cdots+x^{n_1})(1+x+x^2+\cdots+x^{n_2})\\
&\quad\cdots(1+x+x^2+\cdots+x^{n_s})
\end{aligned}
\tag{48}
$$

为母函数．

最后再回到不许重复的情形，这实际上是允许有限重复的一种特殊情形，即相当于上面

$$n_1=n_2=\cdots=n_s=1$$

的情形．这时 $n$ 个物体都是相异的，每次取 $r$ 个也不再有重复的．于是，根据(48)，

$$p_0,\ p_1,\ \cdots,\ p_r,\ \cdots$$

的母函数是

$$\underbrace{(1+x)(1+x)\cdots(1+x)}_{n\text{个}}=(1+x)^n,$$

根据二项式定理便有

$$p_r=C_n^r,$$

这是中学课本中早已知道的结论.

我们把上面的结论总结成下面的

**定理 4** (i) 设有 $n$ 个相异的物体, 如果用 $p_r$ 记每次不许重复地从中取出 $r$ 个的不同取法的总数, 那么数列

$$p_0,\ p_1,\ \cdots,\ p_r,\ \cdots$$

的母函数是

$$\underbrace{(1+x)(1+x)\cdots(1+x)}_{n\text{个}}=(1+x)^n;$$

(ii) 设有 $n$ 个相异的物体, 如果用 $p'_r$ 记每次允许无限重复地从中取出 $r$ 个的不同取法的总数, 那么数列

$$p'_0,\ p'_1,\ \cdots,\ p'_r,\ \cdots$$

的母函数是

$$\underbrace{(1+x+x^2+\cdots+x^r+\cdots)(1+x+x^2+\cdots+x^r+\cdots)\cdots(1+x+x^2+\cdots+x^r+\cdots)}_{n\text{个}}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^n};$$

(iii) 设有 $n$ 个物体, 其中有 $n_1$ 个 $A_1$, $n_2$ 个 $A_2$, $\cdots$, $n_s$ 个 $A_s$, $n_1+n_2+\cdots+n_s=n$, 设从这 $n$ 个物体中每次取 $r$ 个的不同取法的总数为 $p''_r$, 那么数列

$$p''_0,\ p''_1,\ \cdots,\ p''_r,\ \cdots$$

的母函数是

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{n_1})(1+x+x^2+\cdots+x^{n_2})\cdots(1+x+x^2+\cdots+x^{n_s}).$$

由此可见，三种类型的组合问题通过母函数方法得到了统一的处理.

[例 5] 口袋中有白球 5 个，红球 3 个，黑球 2 个，每次从中任取 5 个，问有多少种不同的取法？

**解** 这是有限重复型的组合问题. 根据定理 4 的(iii)，如果任取 $r$ 个的不同取法有 $p_r$ 种，那么 $p_r$ 的母函数是

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2). \quad (49)$$

$p_5$ 就是展开式中 $x^5$ 的系数. 通过直接计算，(49)等于

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+2x+3x^2+3x^3+2x^4+x^5),$$

易知 $x^5$ 的系数为

$$1+2+3+3+2+1=12,$$

即有 12 种不同的取法.

上面这种处理问题的方法，还可用来解决下面的所谓“称重”问题.

设有 $k$ 个砝码，它们的重量分别为 $n_1$ 克，$n_2$ 克，…，$n_k$ 克 ($n_1$, $n_2$, …, $n_k$ 均为整数). 今要在天平秤上称重为 $r$ 克的物体(只允许在天平的一边放砝码)，问有多少种不同的称法？

设有 $a_r$ 种不同的方法称这 $r$ 克重的物体，那么容易证明，数列$\{a_r\}$的母函数是

$$(1+x^{n_1})(1+x^{n_2})\cdots(1+x^{n_k}).$$

事实上，如果我们把第 $i$ 个括弧和 $n_i$ 克($i=1, 2, \cdots, k$)重的砝码相对应，展开式中每个 $x^r$ 总是某几个括弧中的 1 和另外几个括弧中的 $x^{n_i}$ 相乘的结果. 我们把在第 $i$ 个括弧中取 1 解释为“天平上不放重为 $n_i$ 克的砝码”，取 $x^{n_i}$ 解释为“天平上放重为 $n_i$ 克的砝码”. 这样，每个项 $x^r$ 就对应一种称法，所以 $x^r$ 的系数就是所有可能称法的总数. 因而

$$(1+x^{n_1})(1+x^{n_2})\cdots(1+x^{n_k})=\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^r.$$

这就是我们要证明的结论.

请看两个具体的例子.

[例 6]　用 1 克, 2 克, 4 克, 8 克, 16 克五个砝码, 在天平秤上能称哪几种重量的物体?

**解**　设重量为 $r$ 克的物体有 $a_r$ 种称法. 如果 $a_r=0$, 就说明这几个砝码不能称重为 $r$ 克的物体. 因此, 我们的问题是问对哪几个 $r$, 相应的 $a_r\neq 0$. 根据上面的讨论, 数列 $\{a_r\}$ 的母函数是

$$P(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}),$$

只要把它展成幂级数就行了. 由于

$$\begin{aligned}(1-x)P(x)&=(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})\\&=(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})\\&=(1-x^4)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})\\&=(1-x^8)(1+x^8)(1+x^{16})\\&=(1-x^{16})(1+x^{16})=1-x^{32},\end{aligned}$$

所以　$$P(x)=\frac{1-x^{32}}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^{31}.$$

即　$a_r=1\ (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 31)$,　$a_r=0\ (r>31)$.

这说明凡重量不超过 31 克的物体都能用这五个砝码称出来, 而且各只有一种称法; 而重量大于 31 克的物体都不能用这五个砝码称.

[例 7]　设有 1 克重的砝码 1 枚, 3 克重的砝码 3 枚, 7 克重的砝码 2 枚, 用这 6 枚砝码, 能称哪几种重量的物体?

**解**　设用这 6 枚砝码称 $r$ 克重的物体有 $a_r$ 种称法, 那么数列 $\{a_r\}$ 的母函数是

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= (1+x)[1+x^3+(x^3)^2+(x^3)^3][1+x^7+(x^7)^2] \\
&= (1+x)(1+x^3+x^6+x^9)(1+x^7+x^{14}) \\
&= 1+x+x^3+x^4+x^6+2x^7+x^8+x^9 \\
&\quad +2x^{10}+x^{11}+x^{13}+2x^{14}+x^{15}+x^{16}+2x^{17}+x^{18} \\
&\quad +x^{20}+x^{21}+x^{23}+x^{24},
\end{aligned}
$$

**由此可知，在重量不超过 24 克的物体中，除了重量为 2 克，5 克，12 克，19 克，22 克的物体不能称外，其它都能称．重量超过 24 克的物体一概不能称．在能称的物体中，除去重量为 7 克，10 克，14 克，17 克这四种物体有两种不同的称法外，其它都只有一种称法．**

## 习　题　三

**1**．证明定理 3.

**2**．平面上有 10 个点，其中没有三点共线．它们可以确定多少条直线？多少个三角形？

**3**．用 1, 2, 3, 4, 5, 6 六个数字可以组成多少个由八个数字构成的数列，而且每个数列的前一项数必须不大于后一项数．例如 11133456, 23345555 都是满足条件的数列.

**4**．设有 $n$ 种相异的物体，今从中允许无限重复地取出 $r$ 个$(r\geqslant n)$，要求这 $n$ 种物体中的每一种至少在取出的 $r$ 个物体中出现一次，问有多少种不同的取法？

**5**．口袋中放着 12 个球，其中 3 个是红的，3 个是白的，6 个是黑的，从中任取 8 个球，问有多少种不同的取法？

**6**．在上题中，若要求取出的 8 个球中至少有 2 个是黑的，一个是红的，又有多少种不同的取法？

**7**．把正整数 8 写成 3 个非负整数 $n_1, n_2, n_3$ 的和，要求 $n_1\leqslant 3$, $n_2\leqslant 3$, $n_3\leqslant 6$，问有多少种不同的写法？

**8**．在上题中，如果要求 $1\leqslant n_1\leqslant 3$, $0\leqslant n_2\leqslant 3$, $2\leqslant n_3\leqslant 6$，又有多少

种不同的写法?

**9**. 用 1 克, 2 克, 4 克, 8 克, 16 克, 32 克六个砝码, 在天平秤上能称哪几种重量的物体(砝码只许放在天平的一边)? 各有多少种不同的称法?

**10**. 设有 1 克重的砝码 2 枚, 2 克重的砝码 3 枚, 5 克重的砝码 3 枚. 用这 8 个砝码,能称哪几种重量的物体? 各有多少种不同的称法?

**11**. 红、白、黑三种颜色的球各 8 个,从中取出 9 个放成一堆, 要求三种颜色的球都有,问有多少种不同的取法?

# 四、部分分式

在用母函数解决其它一些问题时，需要把有理函数(两个多项式之商)展开成形式幂级数．由于形如 $\frac{A}{(x-a)^k}$ 这种分式很容易展开成形式幂级数：

$$\frac{A}{(x-a)^k}=\frac{(-1)^k}{a^k}\frac{A}{\left(1-\frac{x}{a}\right)^k}=\frac{B}{(1-bx)^k}$$

$$=B\sum_{r=0}^{\infty}C_{k+r-1}^{k-1}b^r x^r,$$

其中 $B=\frac{(-1)^k}{a^k}A$, $b=\frac{1}{a}$. 因此，如果能把真分式(分子多项式的次数低于分母多项式次数的有理函数)写成形如 $\frac{A}{(x-a)^k}$ 这种分式的和，这个真分式也就很容易展开成形式幂级数了．问题是，是否每个真分式都能写成上面这种分式的和？下面的定理肯定了这一点．

**定理 5** (部分分式定理)设 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 是一个真分式，如果 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 分别是多项式 $Q(x)$ 的 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 重根，那么存在常数 $A_1^{(1)}, \cdots, A_{k_1}^{(1)}; A_1^{(2)}, \cdots, A_{k_2}^{(2)}; \cdots; A_1^{(m)}, \cdots, A_{k_m}^{(m)}$, 使得

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}}+\frac{A_{k_1-1}^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1-1}}+\cdots+\frac{A_1^{(1)}}{x-a_1}$$

$$+\frac{A_{k_2}^{(2)}}{(x-a_2)^{k_2}}+\frac{A_{k_2-1}^{(2)}}{(x-a_2)^{k_2-1}}+\cdots+\frac{A_1^{(2)}}{x-a_2}$$

$$+\cdots$$

$$+\frac{A_{k_m}^{(m)}}{(x-a_m)^{k_m}}+\frac{A_{k_m-1}^{(m)}}{(x-a_m)^{k_m-1}}+\cdots+\frac{A_1^{(m)}}{x-a_m}.$$

或简写为
$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_j^{(i)}}{(x-a_i)^j}.$$

在证明这个定理之前，先证明一个

**预备定理** 设 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 是一个真分式，$a$ 是 $Q(x)$ 的一个 $k$ 重根，那么存在常数 $A_1, \cdots, A_k$，使得

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-a}+\frac{P^*(x)}{Q_1(x)} \tag{50}$$

这里 $\frac{P^*(x)}{Q_1(x)}$ 仍是真分式.

**证明** 因为 $a$ 是 $Q(x)$ 的 $k$ 重根，故可写

$$Q(x)=(x-a)^kQ_1(x),\quad Q_1(a)\neq0.$$

我们先证明

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}. \tag{51}$$

事实上，上式即

$$P(x)=A_kQ_1(x)+(x-a)P_1(x),$$

或

$$P(x)-A_kQ_1(x)=(x-a)P_1(x), \tag{52}$$

这就等于说，必须 $x-a$ 能除尽 $P(x)-A_kQ_1(x)$. 由余数定理知道只要有

$$P(a)-A_kQ_1(a)=0.$$

因此只须取
$$A_k=\frac{P(a)}{Q_1(a)},$$

(52) 便能成立，因而 (51) 也成立. 容易看出，(51) 右端第二项是一个真分式. 事实上，如果 $Q_1(x)$ 的次数高于 $P(x)$ 的次数，

那么从(52)得知，$P_1(x)$的次数必低于$Q_1(x)$的次数，因而$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$是真分式．如果$Q_1(x)$的次数不高于$P(x)$的次数，则从(52)得知，$P_1(x)$的次数比$P(x)$低一次，因而比$Q(x)$至少低2次，所以$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$也是真分式．对$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$再用上述方法，便得

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}=\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\frac{P_2(x)}{(x-a)^{k-2}Q_1(x)},$$

这儿$\frac{P_2(x)}{(x-a)^{k-2}Q_1(x)}$是真分式．代入(51)得

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\frac{P_2(x)}{(x-a)^{k-2}Q_1(x)}$$

把这个过程继续下去，便知(50)成立．

现在证明部分分式定理就很简单了．因为$a_1$是$Q(x)$的$k_1$重根，故有

$$Q(x)=(x-a_1)^{k_1}Q_1(x),$$

这时$a_2, a_3, \cdots, a_m$分别是$Q_1(x)$的$k_2, k_3, \cdots, k_m$重根．根据预备定理有

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}}+\frac{A_{k_1-1}^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1-1}}+\cdots+\frac{A_1^{(1)}}{x-a_1}+\frac{P_1^*(x)}{Q_1(x)} \tag{53}$$

这里$\frac{P_1^*(x)}{Q_1(x)}$仍是真分式．由于$a_2$是$Q_1(x)$的$k_2$重根，所以

$$Q_1(x)=(x-a_2)^{k_2}Q_2(x),$$

这时$a_3, \cdots, a_m$分别是$Q_2(x)$的$k_3, \cdots, k_m$重根．根据预备定理，有

$$\frac{P_1^*(x)}{Q_1(x)}=\frac{A_{k_2}^{(2)}}{(x-a_2)^{k_2}}+\frac{A_{k_2-1}^{(2)}}{(x-a_2)^{k_2-1}}$$

$$+\cdots+\frac{A_1^{(2)}}{x-a_2}+\frac{P_2^*(x)}{Q_2(x)}$$

把它代入(53)得

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}}+\frac{A_{k_1-1}^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1-1}}$$

$$+\cdots+\frac{A_1^{(1)}}{x-a_1}+\frac{A_{k_2}^{(2)}}{(x-a_2)^{k_2}}+\frac{A_{k_2-1}^{(2)}}{(x-a_2)^{k_2-1}}$$

$$+\cdots+\frac{A_1^{(2)}}{x-a_2}+\frac{P_2^*(x)}{Q_2(x)},$$

对 $\frac{P_2^*(x)}{Q_2(x)}$ 再重复这个过程，就得到要证明的结果.

注意，这里的根 $a_1$, $a_2$, $\cdots$, $a_m$ 可以是复数，因而那些常数 $A_{k_i}^{(j)}$ 也可能是复数.

在把分式分解成部分分式时，我们常使用待定系数法.

[例 8]　把 $\frac{1}{x^3-x^2-x+1}$ 分解成部分分式之和.

**解**　先把分母 $Q(x)=x^3-x^2-x+1$ 因式分解成

$$x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1),$$

1 是它的二重根，$-1$ 是它的一重根，根据部分分式定理，有

$$\frac{1}{x^3-x^2-x+1}=\frac{1}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}. \tag{54}$$

其中 $a$, $b$, $c$ 是待定的常数. 右端通分，并令等式两边的分子相等，得

$$1=a(x+1)+b(x-1)(x+1)+c(x-1)^2,$$

这是一个恒等式. 命 $x=1$, 即得 $a=\frac{1}{2}$; 命 $x=-1$, 得 $c=\frac{1}{4}$; 命 $x=0$ 得

$$1=a-b+c,$$

所以
$$b=a+c-1=-\frac{1}{4},$$

把 $a$, $b$, $c$ 的值代入(54), 即得分解式

$$\frac{1}{x^3-x^2-x+1}=\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}.$$

[例 9] 把 $\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}$ 分解成部分分式之和.

**解** 把分母 $Q(x)=x^4-3x^3+3x^2-x$ 分解为

$$Q(x)=x(x-1)^3,$$

$x=0$ 是一重根, $x=1$ 是三重根. 根据部分分式定理有

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{(x-1)^3}+\frac{c}{(x-1)^2}+\frac{d}{x-1},$$

右端通分并比较两端的分母得

$$x^3+1=a(x-1)^3+bx+cx(x-1)+dx(x-1)^2, \qquad (54)$$

命 $x=0$, 得 $a=-1$; 命 $x=1$, 得 $b=2$; 为了定出另外两个系数, 比较(54)两端 $x^3$ 的系数, 得 $a+d=1$, 所以 $d=2$; 再比较 $x^2$ 的系数, 得 $-3a+c-2d=0$, 所以 $c=3a+2d=1$, 由此即得

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}=\frac{-1}{x}+\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}.$$

## 习 题 四

把下列真分式分解成部分分式:

1. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-x^2-x+1}$.

2. $\dfrac{-2x^2+14x-17}{6x^3-36x^2+72x-48}$.

3. $\dfrac{6x^2+22x+18}{x^3+6x^2+11x+6}$.

4. $\dfrac{1-7x}{1-5x+6x^2}$.

# 五、整系数一次不定方程整数解的个数

学生会有10只同样的篮球，要分发给甲、乙、丙三个班级，问有多少种不同的分法？

设甲、乙、丙三个班级分得的篮球数分别为 $x, y, z$，于是有

$$x+y+z=10. \tag{55}$$

方程(55)中有三个未知数 $x, y, z$，这种未知数多于一个的方程式称为不定方程；每个未知数都是以一次的形式出现的，而且未知数的系数都是整数(这里恰好是1)，所以称(55)为*整系数一次不定方程*．如果取 $x=1, y=2, z=7$，这三个数是满足方程(55)的，称它为(55)的一个解，记为

$$(x, y, z)=(1, 2, 7).$$

显然，如果没有什么限制，(55)的解是无穷多的．例如

$$(x, y, z)=\left(\frac{1}{2}, 8, \frac{3}{2}\right), \quad (x, y, z)=\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{61}{6}\right)$$

都是(55)的解．但在我们的问题中，篮球的个数既不能是负数，也不能是分数，所以象上面两个解对我们是没有意义的．

如果 $(x_0, y_0, z_0)$ 是(55)的一个解，而且 $x_0, y_0, z_0$ 三个数都是非负整数，就称它是(55)的一个非负整数解．例如(1, 2, 7)，(6, 4, 0)都是(55)的非负整数解．

容易看出，学生会的任何一种分法，都对应着(55)的一个非负整数解，例如分给甲班2个，乙班5个，丙班3个，即

$x=2,\ y=5,\ z=3$, $(2,5,3)$ 当然是(55)的一个非负整数解. 反之, (55)的任何一个非负整数解也对应着一种分法. 因而, 所有分法构成的集合和(55)的非负整数解的全体所构成的集合之间是一一对应的, 因而分法的数目和(55)的非负整数解的个数是一样的. 通过两个集合的元素之间建立一一对应, 从而断言这两集合有相同数目的元素, 这种做法在生活中也是常见的. 例如, 教室中有若干个学生和若干把椅子, 如果学生坐下后, 既没有空着的椅子, 也没有站着的学生, 那么我们马上能断言学生的数目和椅子的数目一样多, 学生和椅子之间建立了一一对应.

通过上面的分析, 我们把问题转化为求一次不定方程(55)的非负整数解的个数. 我们索性把问题提得更一般些:

设有 $r$ 个篮球, 要分发给 $n$ 个班级, 问有多少种不同的分法?

这个问题等价于求含 $n$ 个未知数的一次不定方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=r \tag{56}$$

的非负整数解的个数.

设(56)有 $a_r$ 个非负整数解, 不难发现, 数列

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_r,\ \cdots$$

的母函数就是

$$\underbrace{\begin{matrix}(1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots)(1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots)\\ \cdots(1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots)\end{matrix}}_{n\text{个}} \tag{57}$$

原因很简单. (57)的展开式中每个 $x^r$ 必可写成

$$x^r=x^{m_1}x^{m_2}\cdots x^{m_n}=x^{m_1+m_2+\cdots+m_n}, \tag{58}$$

这里 $x^{m_1},\ x^{m_2},\cdots,\ x^{m_n}$, 分别取自第一, 二, $\cdots$, $n$ 个括弧, 显然, $m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n$ 都是非负整数. 由(58)马上得到

$$m_1+m_2+\cdots+m_n=r,$$

由此可见，$(m_1, m_2, \cdots, m_n)$是方程(56)的一个非负整数解．这就是说，(57)中每一项$x^r$对应方程(56)的一个非负整数解$(m_1, m_2, \cdots, m_n)$；反之，(56)的每一个非负整数解也对应(57)的一项$x^r$．因而(56)的非负整数解的个数$a_r$就等于(57)中$x^r$的项数，同类项合并后，$a_r$就等于$x^r$的系数．所以(57)就是$\{a_r\}$的母函数．而(57)就是

$$\frac{1}{1-x}\,\frac{1}{1-x}\cdots\frac{1}{1-x}=\frac{1}{(1-x)^n},$$

因而得 $$\frac{1}{(1-x)^n}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_rx^r+\cdots,$$

和(29)比较，即得

$$a_r=C_{n+r-1}^r. \quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

这恰好就是从$n$个不同物体中允许无限重复地每次取出$r$个的不同取法的总数．我们把上面的结果总结成

**定理 6** 一次不定方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=r$$

的非负整数解的个数等于$C_{n+r-1}^r$.

现在再来解决本节开头提出的问题就很简单了：10个篮球分给甲、乙、丙三个班级，共有

$$C_{n+r-1}^r=C_{3+10-1}^{10}=C_{12}^{10}=C_{12}^2=66$$

种不同的分法．

上面这种解决问题的想法很重要．有时候给出的问题并没有现成的公式可套，必须灵活运用这种技巧才能解决．

[例 10] 把 10 个篮球分给甲、乙、丙三个班级，甲班不得少于 4 个，乙班不得多于 5 个，问有多少种不同的分法？

**解** 把$r$个篮球按照上面的要求分发给三个班级，设有

$a_r$ 种分法，那么$\{a_r\}$的母函数是

$$f(x)=(x^4+x^5+\cdots+x^k+\cdots)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)\cdot(1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots). \quad (59)$$

我们要求的 $a_{10}$就是(59)的展开式中 $x^{10}$ 的系数. 注意

$$\begin{aligned}f(x)&=x^4(1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)\\&\quad\cdot(1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots)\\&=\frac{x^4}{(1-x)^2}(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)\\&=x^4(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots)\\&=x^4\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{5}x^k\right).\end{aligned}$$

因此只要算出$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{5}x^k\right)$中 $x^6$ 的系数就行了. 显然它等于

$$2+3+4+5+6+7=27.$$

即在题目规定的条件下有 27 种不同的分法.

再回到一次不定方程. 如果方程(56)中 $x_1, x_2, \cdots, x$ 的系数不全是1, 而是其它自然数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$, 即方程为

$$p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n=r, \quad (60)$$

如何计算它的非负整数解的个数?

仍然用母函数的方法来处理. 设(60)的非负整数解的个数为 $b_r$, 我们来计算数列$\{b_r\}$的母函数.

仿照处理方程(56)的办法, 考虑函数

$$\underbrace{[1+x^{p_1}+(x^{p_1})^2+\cdots+(x^{p_1})^k+\cdots]\cdot[1+x^{p_2}+(x^{p_2})^2+\cdots+(x^{p_2})^k+\cdots]\cdots[1+x^{p_n}+(x^{p_n})^2+\cdots+(x^{p_n})^k+\cdots]}_{n\text{个}}$$

它等于

$$(1+x^{p_1}+x^{2p_1}+\cdots+x^{kp_1}+\cdots)(1+x^{p_2}+x^{2p_2}+\cdots+x^{kp_2}+\cdots)$$
$$\cdots(1+x^{p_n}+x^{2p_n}+\cdots+x^{kp_n}+\cdots). \tag{61}$$

它的展开式中每一项 $x^r$ 必可写成

$$x^r=x^{m_1p_1}x^{m_2p_2}\cdots x^{m_np_n}=x^{m_1p_1+m_2p_2+\cdots+m_np_n}, \tag{62}$$

这里 $x^{m_1p_1}$, $x^{m_2p_2}$, $\cdots$, $x^{m_np_n}$ 分别取自第 1, 2, $\cdots$, $n$ 个括弧, $m_1$, $m_2$, $\cdots$, $m_n$ 都是非负整数. 由(62)得

$$m_1p_1+m_2p_2+\cdots+m_np_n=r,$$

即 $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 是方程(60)的一个非负整数解. 反之, (60)的任何一个非负整数解也对应(61)的展开式的一个项 $x^r$, 因而(60)的非负整数解的个数等于展开式(61)中 $x^r$ 的项数, 即 $x^r$ 的系数. 由此得知, 数列 $\{b_r\}$ 的母函数就是(61), 它等于

$$\frac{1}{(1-x^{p_1})(1-x^{p_2})\cdots(1-x^{p_n})}. \tag{63}$$

展开(63), 便能求得 $b_r$. 于是有

**定理 7** 设方程

$$p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n=r$$

的非负整数解的个数为 $b_r$, 则 $b_r$ 的母函数是(63). 这里 $p_1$, $p_2$, $\cdots$, $p_n$ 都是自然数.

[例 11] 用 1 元和 2 元的钞票支付 15 元钱, 问有多少种不同的支付方法?

**解** 本题是问一次不定方程

$$x+2y=15 \tag{64}$$

有多少个非负整数解. 若设不定方程

$$x+2y=r$$

的非负整数解的个数为 $b_r$, 则数列 $\{b_r\}$ 的母函数是

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}. \tag{65}$$

现在只要算出(65)的展开式中 $x^{15}$ 的系数. 在例8中，我们已经把(65)分解为部分分式

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}=\frac{1}{(1-x)^2(1+x)}$$
$$=\frac{1}{2(1-x)^2}+\frac{1}{4(1-x)}+\frac{1}{4(1+x)}, \tag{66}$$

把

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,$$
$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

代入(66)，即得

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{n+1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{(-1)^n}{4}\right]x^n.$$

所以 $$b_n=\frac{n+1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{(-1)^n}{4}=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2}, & n\text{是奇数},\\ \dfrac{n+2}{2}, & n\text{是偶数},\end{cases}$$

当 $n=15$ 时，$b_{15}=8$. 即有8种不同的支付法.

还有一类问题也可通过计算一次不定方程非负整数解的个数得到解决.

每一个自然数 $r$ 总可写成若干个自然数之和，例如

$$5=1+1+1+2,$$

这是分拆自然数5的一种方法，称(1, 1, 1, 2)为5的一种分拆. 显然5的分拆不是唯一的，它可以写成

$$5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1$$
$$=2+1+1+1=1+1+1+1+1,$$

即5有7个不同的分拆. 如果要求每个分拆中的数字都不超过3，那么这样的分拆就只有5个.

现在提出一个一般的问题：在自然数 $r$ 的所有分拆中，每个数字都不超过固定数 $n$ 的分拆有多少个？

如果把 $r$ 的这种分拆的总数记为 $p_r$，那么不难证明，$p_r$ 就是一次不定方程

$$x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n=r \tag{67}$$

的非负整数解的个数．原因是清楚的．因为设 $r$ 有一分拆：

$$r=m_1+m_2+\cdots+m_s,$$

按规定，$m_1, m_2, \cdots, m_s$ 都不能超过 $n$．不妨设 $m_1, m_2, \cdots, m_s$ 中有 $k_1$ 个 1，$k_2$ 个 2，$\cdots$，$k_n$ 个 $n$（如果 $m_1, m_2, \cdots, m_s$ 中根本没有 2，那么 $k_2=0$，余类同），那么 $r$ 就可写成

$$r=1\cdot k_1+2\cdot k_2+\cdots+n\cdot k_n,$$

即 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 是(67)的一个非负整数解．这就是说，$r$ 的一个分拆对应(67)的一个非负整数解．反之，容易知道，(67)的任何一个非负整数解也对应 $r$ 的一个分拆．这就证明了 $r$ 的全部分拆和(67)的全部非负整数解之间是一一对应的，因而两者的数目相同．所以 $p_r$ 就是(67)的非负整数解的个数．根据定理 7，它的母函数是

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)}.$$

［例 12］ 求自然数 $r$ 的分拆的总数，但要求每个分拆中的数字不超过 3．

**解** 设分拆总数是 $p_r$，则 $p_r$ 就是不定方程

$$x_1+2x_2+3x_3=r$$

的非负整数解的个数．$\{p_r\}$的母函数是

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}. \tag{68}$$

下面的问题就是设法把(68)展开成幂级数．

由复数的知识知道，三次方程 $x^3-1=0$ 的三个根是

$$1,\ \omega,\ \omega^2$$

其中 $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$. 容易验证

$$1+\omega+\omega^2=0,\quad \omega^3=1.$$

于是

$$1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)=(1-x)(1-\omega x)(1-\omega^2 x),$$

根据部分分式定理，(68)可以写为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\\&=\frac{1}{(1-x)^3(1+x)(1-\omega x)(1-\omega^2 x)}\\&=\frac{a_3}{(1-x)^3}+\frac{a_2}{(1-x)^2}+\frac{a_1}{1-x}+\frac{b}{1+x}\\&\quad+\frac{c_1}{1-\omega x}+\frac{c_2}{1-\omega^2 x},\end{aligned}\tag{69}$$

现在确定 $a_1, a_2, a_3, b, c_1, c_2$ 这六个常数. 右端通分，并命两端分子相等，得

$$\begin{aligned}1=&a_3(1+x)(1-\omega x)(1-\omega^2 x)\\&+a_2(1-x)(1+x)(1-\omega x)(1-\omega^2 x)\\&+a_1(1-x)^2(1+x)(1-\omega x)(1-\omega^2 x)\\&+b(1-x)^3(1-\omega x)(1-\omega^2 x)\\&+c_1(1-x)^3(1+x)(1-\omega^2 x)\\&+c_2(1-x)^3(1+x)(1-\omega x),\end{aligned}$$

在上式中命 $x=-1$, 并注意到 $1+\omega+\omega^2=0$, $\omega^3=1$, 得

$$1=8b(1+\omega)(1+\omega^2)=8b(1+\omega+\omega^2+\omega^3)=8b,$$

所以 $b=\frac{1}{8}$; 再命 $x=1$, 得

$$1=2a_3(1-\omega)(1-\omega^2)=2a_3(1-\omega-\omega^2+\omega^3)=6a_3,$$

所以 $a_3=\dfrac{1}{6}$; 再命 $x=\omega$, 得

$$1=c_2(1-\omega)^3(1+\omega)(1-\omega^2)=c_2(1-\omega)^4(1+\omega)^2$$
$$=c_2(1-2\omega+\omega^2)^2\omega^4=c_2(-3\omega)^2\omega=9c_2,$$

所以 $c_2=\dfrac{1}{9}$; 再命 $x=\omega^2$, 得

$$1=c_1(1-\omega^2)^3(1+\omega^2)(1-\omega^4)=c_1(1-\omega^2)^2(1-\omega^4)^2$$
$$=c_1(1-\omega^2)^2(1-\omega)^2=c_1(1-\omega-\omega^2+\omega^3)^2=9c_1,$$

所以 $c_1=\dfrac{1}{9}$. 为了确定 $a_1$, $a_2$, 注意

$$\frac{c_1}{1-\omega x}+\frac{c_2}{1-\omega^2 x}=\frac{1}{9}\,\frac{2-(\omega+\omega^2)x}{(1-\omega x)(1-\omega^2 x)}$$
$$=\frac{1}{9}\,\frac{2+x}{1+x+x^2},$$

于是(69)可写成

$$\frac{1}{(1-x)^3(1+x)(1+x+x^2)}$$
$$=\frac{1}{6}\,\frac{1}{(1-x)^3}+\frac{a_2}{(1-x)^2}+\frac{a_1}{1-x}$$
$$+\frac{1}{8}\,\frac{1}{1+x}+\frac{1}{9}\,\frac{2+x}{1+x+x^2},$$

分别命 $x=0$ 和 $x=2$ 得

$$1=\frac{1}{6}+a_2+a_1+\frac{1}{8}+\frac{2}{9},$$

$$-\frac{1}{21}=-\frac{1}{6}+a_2-a_1+\frac{1}{24}+\frac{4}{63},$$

即 $$a_1+a_2=\frac{35}{72},\quad -a_1+a_2=\frac{1}{72}.$$

由此即得 $$a_1=\frac{17}{72},\quad a_2=\frac{1}{4}.$$

代入(69)，得展开式

$$\frac{1}{(1-x)^3(1+x)(1-\omega x)(1-\omega^2x)}$$
$$=\frac{1}{6(1-x)^3}+\frac{1}{4(1-x)^2}+\frac{17}{72(1-x)}$$
$$+\frac{1}{8(1+x)}+\frac{1}{9(1-\omega x)}+\frac{1}{9(1-\omega^2x)},$$

注意到下列展开式

$$\frac{1}{(1-x)^3}=\sum_{r=0}^{\infty}C_{r+2}^{r}x^r,\quad \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{r=0}^{\infty}C_{r+1}^{r}x^r,$$
$$\frac{1}{1-x}=\sum_{r=0}^{\infty}x^r,\quad \frac{1}{1+x}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r x^r,$$
$$\frac{1}{1-\omega x}=\sum_{r=0}^{\infty}\omega^r x^r,\quad \frac{1}{1-\omega^2 x}=\sum_{r=0}^{\infty}\omega^{2r}x^r,$$

即得

$$\frac{1}{(1-x)^3(1+x)(1-\omega x)(1-\omega^2x)}$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{6}C_{r+2}^{r}+\frac{1}{4}C_{r+1}^{r}+\frac{17}{72}+\frac{(-1)^r}{8}+\frac{\omega^r+\omega^{2r}}{9}\right\}x^r,$$

故得 $$p_r=\frac{1}{6}C_{r+2}^{2}+\frac{1}{4}C_{r+1}^{1}+\frac{17}{72}+\frac{(-1)^r}{8}+\frac{\omega^r+\omega^{2r}}{9},$$

由于 $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$，所以

$$\omega^r+\omega^{2r}=\cos\frac{2r\pi}{3}+i\sin\frac{2r\pi}{3}+\cos\frac{4r\pi}{3}$$
$$+i\sin\frac{4r\pi}{3}=2\cos\frac{2r\pi}{3},$$

于是

$$p_r=\frac{(r+2)(r+1)}{12}+\frac{r+1}{4}+\frac{17}{72}+\frac{(-1)^r}{8}+\frac{2}{9}\cos\frac{2r\pi}{3}$$

$$=\frac{(r+3)^2}{12}-\frac{17}{72}+\frac{(-1)^r}{8}+\frac{2}{9}\cos\frac{2r\pi}{3},$$

从这个式子里已经可以计算出 $p_r$, 但计算较复杂. 由于

$$\left|-\frac{17}{72}+\frac{(-1)^r}{8}+\frac{2}{9}\cos\frac{2r\pi}{3}\right|$$

$$\leqslant\frac{7}{72}+\frac{1}{8}+\frac{2}{9}=\frac{32}{72}<\frac{1}{2}$$

即

$$\left|p_r-\frac{(r+3)^2}{12}\right|<\frac{1}{2},$$

所以 $p_r$ 就是离 $\frac{(r+3)^2}{12}$ 较近的那个整数. 这样就简化了计算.

例如, 当 $r=5$ 时, $\frac{(r+3)^2}{12}=\frac{64}{12}=5.333$, 离开 5.333 最近的整数是 5, 所以 $p_5=5$. 这和前面直接计算得到的结果是一致的.

## 习 题 五

1. 证明不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$ 的正整数解的个数为 $C_{r-1}^{n-1}$.

2. 找出方程 $x+y+z=24$ 的大于 1 的整数解的个数.

3. 求方程 $x+y+z=1$ 的整数解的个数, 要求 $x, y, z$ 都大于 $-5$.

4. 求方程 $x+y+z=24$ 的整数解的个数, 要求 $x>1, y>2, z>3$.

5. 证明方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_7=13,\quad x_1+x_2+\cdots+x_{14}=6$$

有相同数目的非负整数解.

6. 证明方程

$$x_1+x_2+x_3=12,\quad x_1+x_2+\cdots+x_{10}=12$$

有相同数目的正整数解.

**7**. 求方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$ 的整数解的个数，但要求

$$x_1>a_1,\ x_2>a_2,\ \cdots,\ x_n>a_n.$$

**8**. 在 100 和 1000000 之间有多少个整数，其数字之和等于 5?

**9**. 在 100 和 1000000 之间有多少个整数，其数字之和小于 5?

**10**. 把 20 个相同的球放入 6 个箱子，有多少种不同的放法?

**11**. 如果在上题中要求每个箱子不空，有多少种不同的放法?

**12**. 求方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=23$ 的正整数解的个数，要求

$$x_1\leqslant 9,\ x_2\leqslant 8,\ x_3\leqslant 7,\ x_4\leqslant 6.$$

**13**. 求方程 $x+y+z=24$ 的整数解的个数，要求

$$1\leqslant x\leqslant 5,\ 12\leqslant y\leqslant 18,\ -1\leqslant z\leqslant 12.$$

**14**. 在 $n$ 个物体中有 $n_1$ 个 $A_1$, $n_2$ 个 $A_2$, $\cdots$, $n_s$ 个 $A_s$, $n_1+\cdots+n_s=n$, 设从这 $n$ 个物体中每次取 $r$ 个的不同取法的总数为 $a_r$，证明 $a_r$ 就是不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_s=r$ 的满足条件

$$x_1\leqslant n_1,\ x_2\leqslant n_2,\ \cdots,\ x_s\leqslant n_s$$

的非负整数解的个数.

**15**. 把 23 本书分发给甲、乙、丙、丁四人，要求这四人得到的书的数量分别不得超过 9 本、8 本、7 本、6 本，问有多少种不同的分法?

**16**. 证明把自然数 $n$ 分拆为不等的正整数之和的分拆数等于把 $n$ 分拆为奇数之和的分拆数.

**17**. 求自然数 50 的分拆的总数，但要求每个分拆中的数字不超过 3.

**18**. 把 18 个排球分发给甲、乙、丙、丁四个班级，要求甲班至少得 1 个，但不得超过 5 个；乙班至少得 1 个，不得超过 6 个；丙班至少得 2 个，不得超过 7 个；丁班至少得 4 个，不得超过 10 个. 问有多少种不同的分法?

# 六、线性循环数列

菲波那契在1202年提出如下的“兔子问题”：

假定一对兔子每隔一个月生一对一雌一雄的小兔，每对小兔在两个月以后也逐月生一对一雌一雄的小兔．现设年初时在兔房里放一对大兔，问一年以后，兔房里有多少对兔子？

我们分析一下这个问题．在二月初，最初的那对大兔要生一对小兔．因此，二月初兔房里有一大一小两对兔子．到三月初，那对大兔继续生一对小兔，这时兔房里已有 $2+1=3$ 对兔子．到四月初，最初的那对大兔又生一对小兔，而二月初出生的那对小兔已经开始能生一对小兔了．因此，四月初，兔房里有 $3+2=5$ 对兔子．到五月初，最初那对大兔继续生一对，二月初出生的那对也生一对，三月初出生的那对开始能生一对了．故五月初兔房里总共有 $5+3=8$ 对兔子．再用这个方法继续讨论下去就有点说不清了，下面换一种方法讨论．

用 $a_n$ 记第 $n$ 个月初时，兔房里兔子的数目，于是

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3,\ a_4=5,\ a_5=8. \tag{70}$$

我们发现，这五个数有一个规律：每一个数是前面两个数的和：

$$a_3=a_1+a_2,\ a_4=a_2+a_3,\ a_5=a_3+a_4,$$

这个规律一般对不对呢？我们可以这样想，第 $n$ 个月初时，兔房中的兔子可以分为两部分：一部分是第 $n-1$ 个月初时已经在兔房中的兔子，共有 $a_{n-1}$ 对；另一部分是第 $n$ 个月初新出生的小兔，总共有 $a_{n-2}$ 对，这是因为凡第 $n-2$ 个月初时在兔

房中的兔子(不论大小)到第 $n$ 个月初时都能生一对小兔. 于是得关系式

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

有了这个递推关系和(70)的那些值,很容易算出 $a_{13}$:

$$a_6 = a_5 + a_4 = 8 + 5 = 13,$$

$$a_7 = a_6 + a_5 = 13 + 8 = 21,$$

$$a_8 = a_7 + a_6 = 21 + 13 = 34,$$

$$a_9 = a_8 + a_7 = 34 + 21 = 55,$$

$$a_{10} = a_9 + a_8 = 55 + 34 = 89,$$

$$a_{11} = a_{10} + a_9 = 89 + 55 = 144,$$

$$a_{12} = a_{11} + a_{10} = 144 + 89 = 233,$$

$$a_{13} = a_{12} + a_{11} = 233 + 144 = 377.$$

由此得知,第二年初,兔房里已有 377 对兔子.

如果规定 $a_0=1$, 依题意又知道 $a_1=1$, 那么 $a_2=2=1+1=a_1+a_0$. 我们把满足递推关系

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots) \tag{71}$$

且有初始值 $a_0=1$, $a_1=1$ 的数列 $\{a_n\}$ 叫做菲波那契数列. 根据上面的计算,这个数列的前 14 项是

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ \cdots$$

如果问,它的第 100 项等于什么? 如果用前面的办法,那就必须把第 100 项前的所有的数都写出来才能知道, 这当然是很麻烦的. 自然产生这样的问题, 能不能根据递推关系(71)和初始值 $a_0=a_1=1$, 就把 $a_n$ 的一般表达式写出来?

这又使我们想起了母函数. 如果能找到菲波那契数列 $\{a_n\}$ 的母函数 $f(x)$, 那么把 $f(x)$ 展开成形式幂级数, $x^n$ 的系数就是 $a_n$.

如何求 $f(x)$ 呢? 因为 $f(x)$ 是 $\{a_n\}$ 的母函数,所以可写成

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots.$$

由此得
$$-xf(x)=-a_0x-a_1x^2-\cdots-a_{n-1}x^n-\cdots$$
$$-x^2f(x)=\qquad -a_0x^2-\cdots-a_{n-2}x^n-\cdots$$

把这三个式子加起来，得

$$(1-x-x^2)f(x)=a_0+(a_1-a_0)x+(a_2-a_1-a_0)x^2$$
$$+\cdots+(a_n-a_{n-1}-a_{n-2})x^n+\cdots \tag{72}$$

因为$\{a_n\}$满足关系 $a_n-a_{n-1}-a_{n-2}=0$，且 $a_0=a_1=1$，(72)就变成

$$(1-x-x^2)f(x)=1,$$

即

$$f(x)=\frac{1}{1-x-x^2} \tag{73}$$

这就是我们要找的非波那契数列的母函数．剩下的问题只是把它展开成形式幂级数了．

根据部分分式定理，很容易把(73)写成部分分式的和：

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{1}{r_2-r_1}\left(\frac{1}{x-r_1}-\frac{1}{x-r_2}\right), \tag{74}$$

其中 $r_1$，$r_2$ 是二次方程 $1-x-x^2=0$ 的两个根：

$$r_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\quad r_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

把(74)改写为

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{1}{r_2-r_1}\left\{\frac{1}{r_2\left(1-\frac{1}{r_2}x\right)}-\frac{1}{r_1\left(1-\frac{1}{r_1}x\right)}\right\},$$

注意到

$$\frac{1}{1-\frac{1}{r_2}x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r_2^n}x^n,\quad \frac{1}{1-\frac{1}{r_1}x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r_1^n}x^n,$$

代入上式得

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{r_2-r_1}\left(\frac{1}{r_2^{n+1}}-\frac{1}{r_1^{n+1}}\right)\right\}x^n,$$

于是

$$a_n=\frac{1}{r_2-r_1}\left(\frac{1}{r_2^{n+1}}-\frac{1}{r_1^{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{(r_1r_2)^{n+1}}\cdot\frac{r_1^{n+1}-r_2^{n+1}}{r_2-r_1},\tag{75}$$

但 $r_1r_2=-1$, $r_2-r_1=-\sqrt{5}$, 而

$$r_1^{n+1}-r_2^{n+1}=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

$$=(-1)^{n+2}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right],$$

代入(75)即得

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\},\tag{76}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

这就是菲波那契数的一般表达式.

这样一个表达式,如果不是通过现在的方法计算出来,是很难想象的:一串正整数通过一个包含无理数的式子表示出来!

在实际计算时,把(76)改写为

$$a_n+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1},$$

因为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是一个小于1的正数,而 $a_n$ 是正整数,故得

$$a_n=\begin{cases}\left[\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right], & n\text{ 是奇数时,}\\ \left[\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]+1, & n\text{ 是偶数时.}\end{cases}$$

这里$\left[\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$表示$\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$的整数部分(例如[3.3]=3, [2.9]=2, [5]=5). 换句话说, 在用(76)计算 $a_n$ 时, 并不需要算出$\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$的值.

菲波那契数所满足的关系式

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)\tag{71}$$

称为数列$\{a_n\}$的递推关系. 根据这个关系式, 只要知道 $a_n$ 的头两项的值, 数列 $a_n$ 便完全确定下来了. 我们的工作就是要根据(71)及 $a_0$, $a_1$ 的初始值定出 $a_n$ 的一般表达式. 上面已经看到, 母函数是解决这个问题的强有力的工具. 下面再看一个稍为复杂一些的例子.

[例 13] 设数列$\{a_n\}$满足关系式

$$a_n=-a_{n-1}+16a_{n-2}-20a_{n-3}.\quad(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)\tag{77}$$

已知初始值 $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=-1$, 求 $a_n$ 的一般表达式.

**解** 我们还是用母函数方法来处理. 设数列

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

的母函数是 $f(x)$, 则有

$$\begin{aligned}f(x)&=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots\\ xf(x)&=\quad a_0x+a_1x^2+a_2x^3+\cdots+a_{n-1}x^n+\cdots\\ -16x^2f(x)&=\quad -16a_0x^2-16a_1x^3-\cdots-16a_{n-2}x^n+\cdots\\ 20x^3f(x)&=\quad 20a_0x^3+\cdots+20a_{n-3}x^n+\cdots\end{aligned}$$

把这四个式子加起来, 有

$$(1+x-16x^2+20x^3)f(x)$$
$$=a_0+(a_0+a_1)x+(a_2+a_1-16a_0)x^2$$
$$+(a_3+a_2-16a_1+20a_0)x^3$$
$$+\cdots+(a_n+a_{n-1}-16a_{n-2}+20a_{n-3})x^n+\cdots, \tag{78}$$

根据初始条件 $a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=-1$以及关系式(77)

$$a_n+a_{n-1}-16a_{n-2}+20a_{n-3}=0,$$

(78)变成
$$(1+x-16x^2+20x^3)f(x)=x,$$

即
$$f(x)=\frac{x}{1+x-16x^2+20x^3}$$

母函数找到了，剩下的只是把它展开成形式幂级数．根据部分分式定理，容易得到

$$\frac{x}{1+x-16x^2+20x^3}$$
$$=\frac{1}{7}\frac{1}{(1-2x)^2}-\frac{2}{49}\frac{1}{1-2x}-\frac{5}{49}\frac{1}{1+5x} \tag{79}$$

把
$$\frac{1}{(1-2x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(2x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^n,$$
$$\frac{1}{1-2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}2^nx^n,$$
$$\frac{1}{1+5x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-5x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n5^nx^n$$

代入(79)，得展开式

$$\frac{x}{1+x-16x^2+20x^3}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{7}(n+1)2^n-\frac{2}{49}2^n-\frac{5}{49}(-1)^n5^n\right\}x^n,$$

由此即得

$$a_n=\frac{1}{7}(n+1)2^n-\frac{1}{49}2^{n+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{49}5^{n+1},$$
$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

这就是要找的解.

一般说来,如果数列$\{a_n\}$满足

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\cdots+c_ka_{n-k},\ (n=k,\ k+1,\ \cdots)\qquad(80)$$

其中 $c_k\neq 0$, 就称$\{a_n\}$是一个 $k$ 阶线性循环数列. 之所以称为"线性",是因为每个 $a_i$ 都是以一次的形式出现的.

线性循环数列是经常遇到的. 例如公比为 $q$ 的等比数列是一阶线性循环数列,因为其定义式是

$$a_n=qa_{n-1},\ (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

公差为 $d$ 的等差数列是二阶线性循环数列, 因为从 $a_n-a_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-2}(=d)$, 可得 $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}$.

菲波那契数列也是一个二阶线性循环数列,因为它满足

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2},$$

例 13 的数列是一个 3 阶线性循环数列,因为它满足

$$a_n=-a_{n-1}+6a_{n-2}-20a_{n-3}.$$

$k$ 阶线性循环数列 $\{a_n\}$由递推关系(80)和 $k$ 个初始值

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{k-1}\qquad(81)$$

所唯一确定. 因为如果 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{k-1}$ 的值都知道了, 由(80)便可算出 $a_k$ 的值, 再根据 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$ 的值, 由(80)便能算出 $a_{k+1}$ 的值,如此等等.

我们的问题是, 如何根据递推关系(80)及 $k$ 个初始值(81),定出 $k$ 阶线性循环数列$\{a_n\}$的一般表达式?

还是用母函数方法. 我们设法找出数列$\{a_n\}$的母函数 $f(x)$.

观察前面两个例子的母函数. 第一个例子的递推关系是

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\quad(n=2,\ 3,\ \cdots)$$

母函数是
$$f(x)=\frac{1}{1-x-x^2},$$

第二个例子的递推关系是

$$a_n=-a_{n-1}+6a_{n-2}-20a_{n-3} \quad (n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$$

母函数是 $$f(x)=\frac{x}{1+x-6x^2+20x^3}$$

如果把这两个递推关系式改写为

$$a_n-a_{n-1}-a_{n-2}=0, \quad a_n+a_{n-1}-6a_{n-2}+20a_{n-3}=0,$$

我们发现，它们的母函数的分母，就是用递推关系式的系数作为系数所构成的多项式. 这一事实对于我们解决一般循环数列的求解问题是颇有启发的. 仿照这一做法，我们把满足关系式(80)的数列$\{a_n\}$的母函数$f(x)$写成

$$f(x)=\frac{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{k-1}x^{k-1}+b_kx^k+\cdots+b_mx^m}{1-c_1x-c_2x^2-\cdots-c_kx^k}, \tag{82}$$

如果能设法把 $b_0$, $b_1$, $\cdots$, $b_m$ 确定下来，母函数就找到了，问题也就解决了. 因为$f(x)$是$\{a_n\}$的母函数，故有

$$\frac{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{k-1}x^{k-1}+b_kx^k+\cdots+b_mx^m}{1-c_1x-c_2x^2-\cdots-c_kx^k}$$
$$=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

或者

$$b_0+b_1x+\cdots+b_{k-1}x^{k-1}+b_kx^k+\cdots+b_mx^m$$
$$=(1-c_1x-c_2x^2-\cdots-c_kx^k)(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)$$

比较两边系数得

$$\begin{aligned}&b_0=a_0,\ b_1=a_1-c_1a_0,\ b_2=a_2-c_1a_1-c_2a_0,\\&b_3=a_3-c_1a_2-c_2a_1-c_3a_0,\ \cdots\\&b_{k-1}=a_{k-1}-c_1a_{k-2}-c_2a_{k-3}-\cdots-c_{k-1}a_0,\end{aligned} \tag{83}$$

当 $n\geqslant k$ 时，

$$b_n=a_n-c_1a_{n-1}-c_2a_{n-2}-\cdots-c_ka_{n-k}=0.$$

由此可知，母函数(82)的分子是一个次数不超过 $k-1$ 的多项

式，它的系数 $b_0, b_1, \cdots, b_{k-1}$ 由(83)所完全确定．这样，$\{a_n\}$ 的母函数就找到了．综上所述，我们得到

**定理 8** 设 $k$ 阶线性循环数列 $\{a_n\}$ 满足关系式

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\cdots+c_ka_{n-k},\ c_k\neq 0,\ (n=k,\ k+1,\ \cdots)$$

如果已知它的 $k$ 个初始值

$$a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{k-1},$$

那么 $\{a_n\}$ 的母函数为

$$f(x)=\frac{b_0+b_1x+\cdots+b_{k-1}x^{k-1}}{1-c_1x-c_2x^2-\cdots-c_kx^k},$$

其中 $b_0, b_1, \cdots, b_{k-1}$ 由关系式(83)确定．分母里的多项式

$$1-c_1x-c_2x^2-\cdots-c_kx^k$$

称为 $\{a_n\}$ 的*特征多项式*．

这个定理解决了一般求解 $k$ 阶线性循环数列的问题．用定理 8 的方法确定母函数，比前面那种直接计算要方便些．还以例 13 为例，在那个例子中

$$c_1=-1,\ \ c_2=6,\ \ c_3=-20,$$
$$a_0=0,\ \ a_1=1,\ \ a_2=-1.$$

根据(83)：

$$b_0=a_0=0,\ \ b_1=a_1-c_1a_0=1,$$
$$b_2=a_2-c_1a_1-c_2a_0=-1-(-1)=0,$$

所以得母函数

$$f(x)=\frac{x}{1+x-6x^2+20x^3}.$$

这样做显然比前面的做法简单．

[例 14] 已知 $\{a_n\}$ 满足递推关系

$$a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2},\quad 且\quad a_0=1,\ a_1=-2,$$

求 $\{a_n\}$．

**解** $\{a_n\}$的特征多项式是$1-5x+6x^2$，故其母函数为

$$f(x)=\frac{b_0+b_1x}{1-5x+6x^2}.$$

由(83)知，$b_0=a_0=1$，$b_1=a_1-c_1a_0=-2-5=-7$，所以得

$$f(x)=\frac{1-7x}{1-5x+6x^2},$$

分解成部分分式，并展开为形式幂级数，得

$$f(x)=\frac{1-7x}{1-5x+6x^2}=\frac{5}{1-2x}-\frac{4}{1-3x}$$

$$=5\sum_{n=0}^{\infty}2^nx^n-4\sum_{n=0}^{\infty}3^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(5\cdot2^n-4\cdot3^n)x^n$$

故得要求的数列

$$a_n=5\cdot2^n-4\cdot3^n.\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

我们已经学会如何求解满足递推关系(80)的数列$\{a_n\}$，但在有的问题中，数列$\{a_n\}$满足的是另一类型的递推关系，例如满足

$$a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}+2^n,$$

或
$$a_n=3a_{n-1}+7a_{n-2}+3,$$

这种递推关系式和(80)的差别就在于它多了一个与$a_n$无关的项. 我们称这种关系式为*非齐次的递推关系式*，而(80)则称为*齐次的递推关系式*. 下面是一个解非齐次的递推关系的例子.

[例 15] 已知$\{a_n\}$满足递推关系

$$a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}+2^n,\quad 且\quad a_0=1,\ a_1=-2,$$

求$\{a_n\}$.

**解** 和上例不同的是这里在递推关系后面多了一个与$a_n$无关的项$2^n$. 仍设$a_n$的母函数为$f(x)$，于是

$$f(x)=a_0+\ a_1x+\ a_2x^2+\cdots+\quad a_nx^n+\cdots,$$
$$-5xf(x)=\quad -5a_0x-5a_1x^2-\cdots-5a_{n-1}x^n+\cdots,$$
$$6x^2f(x)=\qquad\qquad 6a_0x^2+\cdots+6a_{n-2}x^n+\cdots,$$
$$-\frac{1}{1-2x}=-1-2x-\ 2^2x^2-\cdots-\quad 2^nx^n+\cdots,$$

把这四个式子加起来得

$$(1-5x+6x^2)f(x)-\frac{1}{1-2x}$$
$$=(a_0-1)+(a_1-5a_0-2)x+(a_2-5a_1+6a_0-2^2)x^2+\cdots$$
$$+(a_n-5a_{n-1}+6a_{n-2}-2^n)x^n+\cdots=-9x,$$

所以

$$f(x)=\frac{1-9x+18x^2}{(1-2x)(1-5x+6x^2)}=\frac{(1-3x)(1-6x)}{(1-2x)^2(1-3x)}$$
$$=\frac{1-6x}{(1-2x)^2}=(1-6x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^nx^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}6(n+1)2^nx^{n+1}$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\{(n+1)2^n-6n2^{n-1}\}x^n.$$

于是得

$$a_n=(n+1)2^n-6n\cdot2^{n-1}=2^n(1-2n).\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

**在上面的解法中，关键是要知道自由项 $2^n$ 的母函数。这个例子提供了解带有自由项的非齐次递推关系的方法。**

## 习　题　六

求满足下列递推关系和初始条件的数列$\{a_n\}$:

**1**. $a_n=a_{n-1}+2^{n-1}$, $a_0=0$.

**2**. $a_n=a_{n-1}+n-1$, $a_0=1$.

**3**. $a_n=a_{n-1}+\frac{1}{2}n(n+1)$, $a_0=0$.

4. $a_n=a_{n-1}+5-n$, $a_0=0$.

5. $a_n=a_{n-1}+9a_{n-2}-9a_{n-3}$, $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=2$.

6. $a_n=3a_{n-2}-2a_{n-3}$, $a_0=1$, $a_1=0$, $a_2=0$.

7. $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}+2^n$, $a_0=a_1=1$.

8. 用1, 2, 3三个数字来构造$n$位数，但不允许有两个紧挨着的1出现在$n$位数中(例如，当$n=5$时，31212 是允许的，11223, 31112都是不允许的)，问能构造多少个这样的$n$位数?

9. 有排成一行的$n$个方格，今用红白两色给这$n$个方格染色，每一方格只涂一种颜色. 如果要求相邻两格不能都涂红色，问有几种不同的染法?

10. 有甲、乙、丙三个小圆桌，甲桌上有$n$个大小不同的盘子依大小次序迭在一起，最大的在底下，最小的在顶上. 现要把这堆盘子按甲桌上的次序移到另一桌上，但规定每次只能移动最上面的一个盘子，而且不允许把大的盘子放在小的盘子上. 问至少要移动多少次，才能把这堆盘子移到另一桌上?（每个圆桌的大小只够放一个最大的盘子）

## 七、高阶等差数列

读者都会用数学归纳法证明下列公式：

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \qquad (84)$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad (85)$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}. \qquad (86)$$

但是这些公式是怎么得来的？(84)是一个等差数列的和，按照等差数列的求和公式，很容易得到(84)．(85)，(86)中两个数列都不是等差数列，不能用等差数列的求和公式，怎么办？仔细观察一下(85)中自然数平方的数列：

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ \cdots,$$

它虽不是等差数列，即它的后项与前项之差各不相等，但由这个差所构成的数列却是等差的：

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ \cdots$$

(86)中自然数立方的数列也有类似的性质：

$$1,\quad 8,\quad 27,\quad 64,\quad 125,\quad 216,\cdots$$

$$7,\quad 19,\quad 37,\quad 61,\quad 91,\cdots$$

$$12,\quad 18,\quad 24,\quad 30,\cdots$$

上面第二行即它的后项与前项之差的数列还不是等差的，再作一次差(即第三行)得到的才是等差数列．

这几个数列的共同特点，启发我们研究一个更一般的问题.

设 $\{a_n\}=\{a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\}$

是一个给定的数列. 称

$$\Delta\{a_n\}=\{a_1-a_0,\ a_2-a_1,\ a_3-a_2,\ \cdots,\ a_n-a_{n-1},\ \cdots\}$$

是$\{a_n\}$的一阶差分数列. 如果$\Delta\{a_n\}$是零数列，即

$$\Delta\{a_n\}=\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots\},$$

那么 $$a_0=a_1=a_2=\cdots=a_n=\cdots$$

即$\{a_n\}$的每项都是同一个常数. 如果$\Delta\{a_n\}$不是零数列，可以再作它的差分数列:

$$\begin{aligned}\Delta^2\{a_n\}&=\Delta\{\Delta\{a_n\}\}\\&=\{(a_2-a_1)-(a_1-a_0),\ (a_3-a_2)-(a_2-a_1),\ \cdots,\\&\quad (a_n-a_{n-1})-(a_{n-1}-a_{n-2}),\ \cdots\}\\&=\{a_2-2a_1+a_0,\ a_3-2a_2+a_1,\ \cdots,\ a_n-2a_{n-1}+a_{n-2},\ \cdots\},\end{aligned}$$

称它为$\{a_n\}$的二阶差分数列. 如果$\Delta^2\{a_n\}$是零数列，那么

$$a_1-a_0=a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}=\cdots$$

即$\{a_n\}$是一等差数列. 如果$\Delta^2\{a_n\}$不是零数列；还可作它的一阶差分数列:

$$\begin{aligned}\Delta^3\{a_n\}&=\Delta\{\Delta^2\{a_n\}\}\\&=\{a_3-3a_2+3a_1-a_0,\ \cdots,\\&\quad a_n-3a_{n-1}+3a_{n-2}-a_{n-3},\ \cdots\},\end{aligned}$$

如果$\Delta^3\{a_n\}$是零数列，就称$\{a_n\}$是二阶等差数列. 如果$\Delta^3\{a_n\}$不是零数列，还可作$\Delta^4\{a_n\}$，等等.

一般来说，我们有

**定义 8** 如果$\Delta^k\{a_n\}$不是零数列，而$\Delta^{k+1}\{a_n\}$是零数列，就称$\{a_n\}$是 $k$ 阶等差数列.

例如，前面提到过的自然数平方的数列

$$\{a_n\}=\{1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ \cdots\},$$

它的一阶差分数列

$$\Delta\{a_n\}=\{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ \cdots\}$$

不是零数列，二阶差分数列

$$\Delta^2\{a_n\}=\{2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \cdots\}$$

也不是零数列，而三阶差分数列

$$\Delta^3\{a_n\}=\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots\}$$

是零数列，故称它为二阶等差数列．又如自然数立方的数列：

$$\{b_n\}=\{1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216,\ \cdots\},$$

$$\Delta\{b_n\}=\{7,\ 19,\ 37,\ 61,\ 91,\ \cdots\},$$

$$\Delta^2\{b_n\}=\{12,\ 18,\ 24,\ 30,\ \cdots\},$$

$$\Delta^3\{b_n\}=\{6,\ 6,\ 6,\ \cdots\},$$

$$\Delta^4\{b_n\}=\{0,\ 0,\ 0,\ \cdots\}.$$

所以$\{b_n\}$是三阶等差数列．

现在问，$\{a_n\}$的 $k$ 阶差分数列 $\Delta^k\{a_n\}$的一般项如何表示？

**定理 9** 设$\{a_n\}$是一个给定的数列，如果记

$$\Delta^k\{a_n\}=\{a_0^{(k)},\ a_1^{(k)},\ a_2^{(k)},\ \cdots,\ a_n^{(k)},\ \cdots\},$$

那么

$$\begin{aligned}a_n^{(k)}&=a_{n+k}-C_k^1a_{n+k-1}+C_k^2a_{n+k-2}-\cdots+(-1)^ka_n\\&=\sum_{r=0}^{k}(-1)^rC_k^ra_{n+k-r}.\end{aligned}\qquad(87)$$

**证明** 对 $k$ 用数学归纳法．$k=1$ 时，

$$a_n^{(1)}=a_{n+1}-a_n,$$

(87)成立．今设 $k=m$ 时，(87)成立，即

$$a_n^{(m)}=\sum_{r=0}^{m}(-1)^rC_m^ra_{n+m-r},\qquad(88)$$

要由此推出 $k=m+1$ 时(87)也成立．按定义和(88)，我们有

$$
\begin{aligned}
a_n^{(m+1)} &= a_{n+1}^{(m)} - a_n^{(m)} \\
&= \sum_{r=0}^{m}(-1)^r C_m^r a_{n+1+m-r} - \sum_{r=0}^{m}(-1)^r C_m^r a_{n+m-r} \\
&= C_m^0 a_{n+m+1} + \sum_{r=1}^{m}(-1)^r C_m^r a_{n+1+m-r} \\
&\quad - \sum_{r=1}^{m+1}(-1)^{r-1} C_m^{r-1} a_{n+m-(r-1)} \\
&= a_{n+m+1} + \sum_{r=1}^{m}(-1)^r C_m^r a_{n+m+1-r} \\
&\quad + \sum_{r=1}^{m}(-1)^r C_m^{r-1} a_{n+m+1-r} + (-1)^{m+1} a_n \\
&= a_{n+m+1} + \sum_{r=1}^{m}(-1)^r (C_m^r + C_m^{r-1}) a_{n+m+1-r} + (-1)^{m+1} a_n \\
&= a_{n+m+1} + \sum_{r=1}^{m}(-1)^r C_{m+1}^r a_{n+m+1-r} + (-1)^{m+1} a_n \\
&= \sum_{r=0}^{m+1}(-1)^r C_{m+1}^r a_{n+(m+1)-r},
\end{aligned}
$$

这就证明了 $k=m+1$ 时(88)成立．由数学归纳法原理，(87)对所有自然数 $k$ 成立．

现在回到原来的问题．设

$$\{a_n\} = \{a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\}$$

是一个 $k$ 阶等差数列，如何计算它的前 $n+1$ 项的和？如果这个问题解决了，那么由于自然数的平方数列和立方数列分别是二阶和三阶等差数列，它们的求和公式自然就能导出．

记 $$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

我们把 $s_n$ 看成是由 $\{a_n\}$ 作出的新数列：

$$\{s_n\} = \{s_0,\ s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n,\ \cdots\},$$

如果能算出 $\{s_n\}$ 的母函数，从这个母函数的展开式便能得到 $s_n$ 的表达式．因为 $\{s_n\}$ 是由 $\{a_n\}$ 作出的，它的母函数当然和

$\{a_n\}$的母函数有关. 设$\{a_n\}$的母函数为$f(x)$, 即

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

注意到 $$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,$$

那么

$$\frac{f(x)}{1-x}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}a_j\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}s_nx^n.$$

这就是说, $\dfrac{f(x)}{1-x}$ 是数列$\{s_n\}$的母函数. 于是有

**定理 10** 设$f(x)$是数列$\{a_n\}$的母函数, 如果记

$$s_n=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n,\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

那么数列$\{s_n\}$的母函数为

$$\frac{f(x)}{1-x}.$$

这样一来, 问题就归结为如何计算$k$阶等差数列$\{a_n\}$的母函数$f(x)$了.

按照$k$阶等差数列的定义, $\{a_n\}$的$k$阶差分数列不是零数列, 它的$k+1$阶差分数列$\Delta^{k+1}\{a_n\}$是零数列, 即

$$\Delta^{k+1}\{a_n\}=\{0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots\}.$$

根据定理 9, $\Delta^{k+1}\{a_n\}$的一般项为

$$a_n^{(k+1)}=a_{n+k+1}-C_{k+1}^1a_{n+k}+C_{k+1}^2a_{n+k-1}-\cdots+(-1)^{k+1}a_n,$$
$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

于是得

$$a_{n+k+1}-C_{k+1}^1a_{n+k}+C_{k+1}^2a_{n+k-1}-\cdots+(-1)^{k+1}a_n=0,$$
$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

如果把$n$换成$n-k-1$, 上式变成

$$a_n=C_{k+1}^1a_{n-1}-C_{k+1}^2a_{n-2}+\cdots+(-1)^{k+1}a_{n-k-1},$$
$$(n=k+1,\ k+2,\ \cdots)$$

这说明$\{a_n\}$是一个$k+1$阶线性循环数列．上一节中我们已经指出等差数列是二阶的线性循环数列．到这里我们进一步发现，原来高阶等差数列都是一种特殊的线性循环数列：$k$阶等差数列是一个$k+1$阶的线性循环数列！根据定理8，我们已经知道如何去求一个线性循环数列的母函数，因而也就会算高阶等差数列的母函数．

根据前面求线性循环数列母函数的方法，得到求高阶等差数列$\{a_n\}$前$n+1$项的和$s_n$的方法如下：

设$\{a_n\}$是一$k$阶等差数列，它满足递推关系：

$$a_n-C_{k+1}^1a_{n-1}+C_{k+1}^2a_{n-2}-\cdots+(-1)^{k+1}a_{n-k-1}=0,$$

因此它的特征多项式是

$$1-C_{k+1}^1x+C_{k+1}^2x^2-\cdots+(-1)^{k+1}x^{k+1}=(1-x)^{k+1},$$

从而得$\{a_n\}$的母函数为

$$f(x)=\frac{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_kx^k}{(1-x)^{k+1}},$$

这里$b_0$, $b_1$, $\cdots$, $b_k$由$\{a_n\}$的$k+1$个初始值和特征多项式的系数通过下列各式确定：

$$b_0=a_0,\ b_1=a_1-C_{k+1}^1a_0,\ b_2=a_2-C_{k+1}^1a_1+C_{k+1}^2a_0,\ \cdots,$$
$$b_k=a_k-C_{k+1}^1a_{k-1}+C_{k+1}^2a_{k-2}-\cdots+(-1)^kC_{k+1}^ka_0. \quad (89)$$

于是$\{s_n\}$的母函数$f_s(x)$为

$$f_s(x)=\frac{f(x)}{1-x}.$$

［例16］ 计算$S_n^{(2)}=1^2+2^2+\cdots+n^2$.

**解** 考虑数列

$$\{a_n\}=\{0,\ 1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \cdots,\ n^2,\ \cdots\},$$

它是一个二阶等差数列．它的母函数为

$$f(x)=\frac{b_0+b_1x+b_2x^2}{(1-x)^3},$$

由于 $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=4$, 所以

$$b_0=0,\ b_1=a_1-C_3^1a_0=1,\ b_2=a_2-C_3^1a_1+C_3^2a_0=4-3=1.$$

所以
$$f(x)=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}.$$

因而$\{s_n\}$的母函数为

$$f_s(x)=\frac{f(x)}{1-x}=\frac{x+x^2}{(1-x)^4},$$

把它分解为部分分式,并用定理1得

$$\frac{x+x^2}{(1-x)^4}=\frac{2}{(1-x)^4}-\frac{3}{(1-x)^3}+\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}C_{3+n}^3x^n-3\sum_{n=0}^{\infty}C_{2+n}^2x^n+\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+1}^1x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\{2C_{n+3}^3-3C_{n+2}^2+C_{n+1}^1\}x^n.$$

于是

$$S_n^{(2)}=2C_{n+3}^3-3C_{n+2}^2+C_{n+1}^1=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

[例 17] 计算 $S_n^{(4)}=1^4+2^4+\cdots+n^4$.

**解** 因为数列

$$\{a_n\}=\{0,\ 1^4,\ 2^4,\ 3^4,\ \cdots,\ n^4,\ \cdots\}$$

是一个四阶等差数列,它的母函数是

$$f(x)=\frac{b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4}{(1-x)^5},$$

由于 $a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=16,\ a_3=81,\ a_4=256,$

代入(89)得

$$b_0=0,\ b_1=1,\ b_2=11,\ b_3=11,\ b_4=1.$$

所以 $$f(x)=\frac{x+11x^2+11x^3+x^4}{(1-x)^5}.$$

于是$\{s_n\}$的母函数为

$$f_s(x)=\frac{x+11x^2+11x^3+x^4}{(1-x)^6}.$$

把它分解成部分分式，并用定理 1 得

$$\frac{x+11x^2+11x^3+x^4}{(1-x)^6}$$

$$=\frac{24}{(1-x)^6}-\frac{60}{(1-x)^5}+\frac{50}{(1-x)^4}-\frac{15}{(1-x)^3}+\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\{24C_{n+5}^5-60C_{n+4}^4+50C_{n+3}^3-15C_{n+2}^2+C_{n+1}^1\}x^n,$$

所以 $$S_n^{(4)}=24C_{n+5}^5-60C_{n+4}^4+50C_{n+3}^3-15C_{n+2}^2+C_{n+1}^1.$$

用这个方法求自然数方幂的和在方次不太高时还是可以的，当方次升高时，例如求

$$S_n^{(6)}=1^6+2^6+3^6+\cdots+n^6,$$

就显得比较麻烦，虽然在原则上并没有带来任何困难．原因是这里介绍的方法比较一般，它不是专门为求自然数的方幂和而设计的．对下面这种类型的例子，上面的方法比较有效．

［例 18］ 在图 1 所示的正方形 $R$ 内，有多少个整点（两个坐标都是整数的点称为整点）？

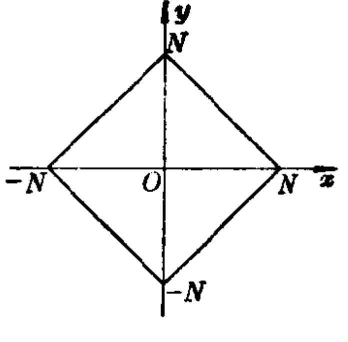



图 1

**解** 在正方形 $R$ 内任取一个整点$(x, y)$，因为 $x$, $y$ 都是整数，所以

$$|a|+|y|=n, \qquad (90)$$

这里的 $n$ 是一个非负整数，且 $n\leqslant N$. 反之，对任意不超过 $N$ 的非负整数 $n$，如果有整数 $x$, $y$，使得(90)成立，那么$(x, y)$必是 $R$ 中的整点．如果记不定方程(90)的整数解（不

一定是非负的)的个数为 $a_n$，那么正方形 $R$ 内的整点的数目 $s_N$ 为

$$s_N=a_0+a_1+\cdots+a_N,$$

根据定理 10，如果$\{a_n\}$的母函数为$f(x)$，那么$\{s_N\}$的母函数为

$$\frac{f(x)}{1-x}.$$

不难明白，$\{a_n\}$的母函数为

$$f(x)=(1+2x+2x^2+2x^3+\cdots+2x^n+\cdots)$$
$$\cdot(1+2x+2x^2+2x^3+\cdots+2x^n+\cdots), \qquad (91)$$

为什么呢？ 我们把(91)的第一个括弧和横坐标 $x$ 对应，第二个括弧和纵坐标 $y$ 对应．从第一个括弧中取出项 $2x^k$，解释为取出某个横坐标的绝对值为 $k$ 的点，$x^k$ 前有系数 2 是因为绝对值为 $k$ 的横坐标有 $k$ 和 $-k$ 两个；从第二个括弧中取 $2x^j$，解释为取出某个纵坐标的绝对值为 $j$ 的点．于是(91)中某两项的乘积

$$2x^k\cdot 2x^{n-k}=4x^n,$$

实际上对应这样四个整点：

$$(k,\ n-k),\ (-k,\ n-k),\ (k,\ -(n-k)),$$
$$(-k,\ -(n-k)).$$

它们都满足

$$|x|+|y|=n. \qquad (90)$$

这说明(91)的展开式中 $x^n$ 的系数就是(90)的整数解的个数，因而(91)是$\{a_n\}$的母函数．容易看出

$$f(x)=\{1+2x(1+x+x^2+\cdots)\}^2=\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^2$$
$$=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2,$$

所以$\{s_N\}$的母函数为

$$f_s(x)=\frac{1+2x+x^2}{(1-x)^3},$$

把它分解成部分分式，并用定理 1 即得：

$$\frac{1+2x+x^2}{(1-x)^3}=\frac{4}{(1-x)^3}-\frac{4}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}$$

$$=4\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+2}^2x^n-4\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+1}^1x^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\{4C_{n+2}^2-4(n+1)+1\}x^n,$$

所以 $$s_N=4C_{N+2}^2-4(N+1)+1=2N^2+2N+1.$$

这就是正方形 $R$ 中整点的个数.

## 习　题　七

**1**．验证

$$\{1,\ 2^4,\ 3^4,\ 4^4,\ \cdots,\ n^4,\ \cdots\},$$
$$\{1,\ 2^5,\ 3^5,\ 4^5,\ \cdots,\ n^5,\ \cdots\}$$

分别是四阶和五阶等差数列.

**2**．验证数列

$$C_r^r,\ C_{r+1}^r,\ C_{r+2}^r,\ \cdots,\ C_{r+n}^r,\ \cdots$$

是 $r$ 阶等差数列.

**3**．用求高阶等差数列的和的方法，计算

$$S_n^{(3)}=1^3+2^3+\cdots+n^3.$$

**4**．求平面上由直线 $x+2y=n$(自然数)与两个坐标轴所围成的直角三角形内(包括边上)整点的个数.

# 八、一个几何问题

在一个多边形内部任取两点 $A$、$B$，如果连结这两点的线段完全落在这多边形的内部，就称这多边形为凸多边形；不然的话，称为凹多边形．图 2 画的是凸七边形，图 3 是凹六边形．

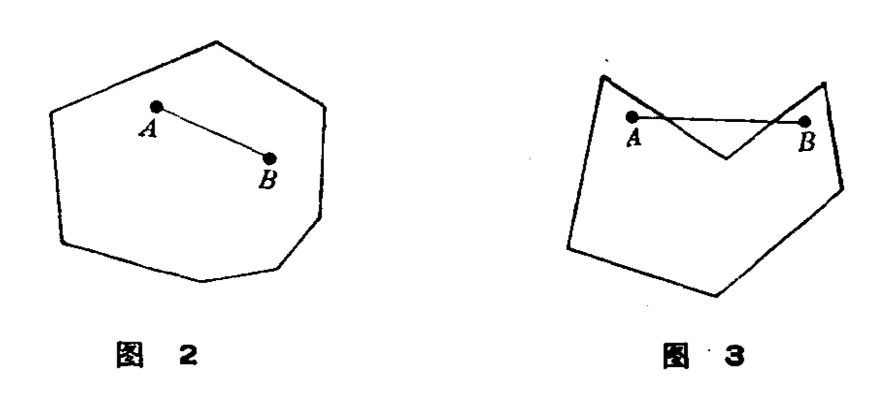



图 2　　　　图 3

一个凸 $n$ 边形有 $n$ 个顶点和 $n$ 条边，不相邻的两个顶点的连线称为对角线．凸 $n$ 边形有多少条对角线？这容易计算，因为每两点连一线段，共可连 $C_n^2$ 条，除去 $n$ 条边，剩下的就是对角线，共有：

$$C_n^2-n=\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2}(\text{条}).$$

例如七边形有

$$\frac{n(n-3)}{2}=\frac{7\cdot 4}{2}=14$$

条对角线．在这 14 条对角线中，有的在多边形内部相交，有的不相交．例如从某一顶点 $A$ 出发的四条对角线在多边形内部是不相交的（图 4），它们把这凸七边形分成了五个三角

形. 容易看出，用四条在内部不相交的对角线把凸七边形分成五个三角形的分法不是唯一的，图5就是另一种分法. 我们问，一共有多少种不同的分法?

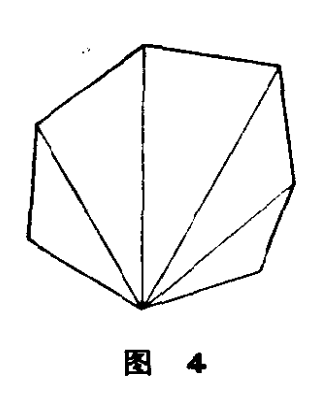


图 4

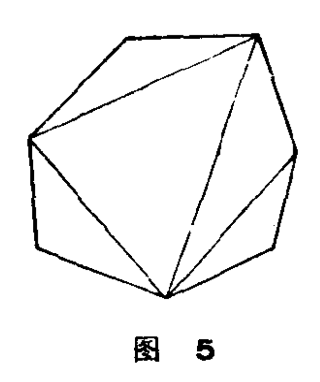


图 5

更为一般地，可以问，设有一凸 $n$ 边形，用 $n-3$ 条在内部不相交的对角线把这凸 $n$ 边形分成 $n-2$ 个三角形，一共有多少种不同的分法?

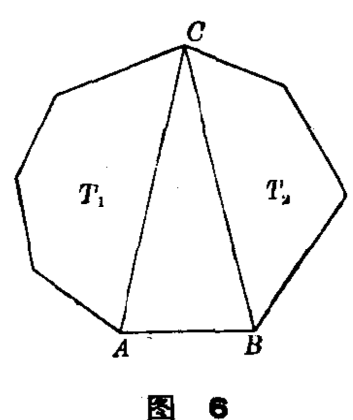



图 6

我们仍用母函数方法解决这个问题. 对凸 $n+1$ 边形而言，设有 $a_n$ 种不同的分法. 显然，$n=1$ 时，问题没有意义，我们规定 $a_1=1$. $n=2$ 时，$n+1$ 边形是个三角形，它只有一种分法，就是它自己，因此 $a_2=1$. 今设 $n\geqslant 3$. 我们在凸 $n+1$ 边形 $T$ 中先任意取定一条边，例如图6中的 $AB$，另取一点 $C$. 设 $\triangle ABC$ 左边的图形 $T_1$ 是一个凸 $k+1$ 边形，那么 $\triangle ABC$ 右边的图形 $T_2$ 必是一个凸 $n-k+1$ 边形. 根据假定，凸 $k+1$ 边形 $T_1$ 有 $a_k$ 种不同的分法，凸 $n-k+1$ 边形 $T_2$ 有 $a_{n-k}$ 种不同的分法. $T_1$, $T_2$ 的每一种分法就给出整个 $n+1$ 边形 $T$ 的一种分法. 因为 $T_1$ 有 $a_k$ 种分法，$T_2$ 有 $a_{n-k}$ 种分法，故 $T$ 有 $a_ka_{n-k}$ 种分法，这些分法是对固定的 $C$ 点而言的. 今让 $C$ 点取遍

$A, B$ 外的所有点，那么共有

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_1$$

种不同的分法，这就是凸 $n+1$ 边形的所有可能不同的分法，因而有

$$a_n = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_1. \tag{92}$$

这是 $a_n$ 满足的递推关系．现在的问题是如何从(92)解出 $a_n$．第六节的方法现在不适用，因为(92)是非线性的，但母函数的思想仍然有效．设数列

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

的母函数是 $f(x)$，即

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \quad (a_1 = 1,\ a_0 = 0) \tag{93}$$

那么

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)^2 \\ &= a_1^2 x^2 + (a_1 a_2 + a_2 a_1) x^3 + (a_1 a_3 + a_2 a_2 + a_3 a_1) x^4 + \cdots \\ &\quad + \cdots + (a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_1) x^n + \cdots. \end{aligned}$$

根据(92)和初始条件 $a_1 = a_2 = 1$，上式可写为

$$\begin{aligned} f^2(x) &= a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ &= f(x) - a_1 x = f(x) - x, \end{aligned}$$

这就是说，$f(x)$ 满足一个二次方程

$$(f(x))^2 - f(x) + x = 0.$$

有两个函数满足上面的方程，它们是

$$f_1(x) = \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2}, \quad f_2(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2},$$

因为 $f_1(0) = 1$，$f_2(0) = 0$，而我们要找的 $f(x)$ 满足 $f(0) = 0$，所以只能取

$$f(x)=f_2(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2},\tag{93}$$

现在只要把$f(x)$展开成形式幂级数，便能得到$a_n$的表达式. 根据定理2,

$$\sqrt{1+x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n-1}}C_{2(n-1)}^{n-1}x^n,$$

把$x$换成$-4x$，就得

$$\begin{aligned}\sqrt{1-4x}&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n-1}}C_{2(n-1)}^{n-1}(-4x)^n\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n2^{2n-1}}4^nC_{2(n-1)}^{n-1}x^n\\&=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}C_{2(n-1)}^{n-1}x^n,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}C_{2(n-1)}^{n-1}x^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}C_{2(n-1)}^{n-1}x^n,\end{aligned}$$

由此立刻得到

$$a_n=\frac{1}{n}C_{2(n-1)}^{n-1},\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

这就是我们要找的$a_n$的表达式.

这个几何问题和“兔子问题”不一样，它导致一个非线性的循环数列，我们还是用母函数方法得到了它的解. 这说明母函数方法对解决某些非线性循环数列的问题还是有效的.

## 习 题 八

1. 证明凸$n$边形有$n-3$条在内部不相交的对角线.
2. 证明凸$n$边形被$n-3$条在内部不相交的对角线分解成$n-2$

个三角形.

**3**. 设有 $n$ 个实数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，问有多少种不同的方式组成乘积 $y_1\times y_2\times\cdots\times y_n$? 但因子的次序不准交换.

例如 $n=3$ 时有 2 种方式:

$$(y_1\times y_2)\times y_3, \quad y_1\times(y_2\times y_3).$$

$n=4$ 时有 5 种方式:

$y_1\times[(y_2\times y_3)\times y_4]$, $y_1\times[y_2\times(y_3\times y_4)]$,
$[(y_1\times y_2)\times y_3]\times y_4$, $[y_1\times(y_2\times y_3)]\times y_4$, $(y_1\times y_2)\times(y_3\times y_4)$.

# 九、指数型母函数

设

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots \tag{94}$$

是一个给定的数列，我们称形式幂级数

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

为它的母函数. 在引进形式幂级数的运算法则以后，我们看到，这样一个母函数的概念在解决一系列的问题中起了关键性的作用. 但是在解决另外一些问题时，下面介绍的指数型母函数概念将起重要的作用.

**定义 9** 对于给定的数列(94)，我们称形式幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n=a_0+a_1x+\frac{a_2}{2!}x^2+\frac{a_3}{3!}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n!}x^n+\cdots \tag{95}$$

为数列(94)的**指数型母函数**，这里规定 $0!=1$.

以前讨论的母函数和指数型母函数的差别，就在于前者直接用 $a_n$ 作幂级数的系数，而后者则是用 $\frac{a_n}{n!}$ 作为幂级数的系数.

因为指数型母函数仍是一个形式幂级数，所以关于它的加法、乘法、除法等运算还是按照形式幂级数的相应运算来做，不必重新定义.

设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的指数型母函数分别为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n,\ g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}x^n,$$

容易验证

$$f(x)g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}x^n, \tag{96}$$

其中
$$c_n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a_k b_{n-k}.$$

证明很简单，根据形式幂级数的乘法规则，

$$\frac{c_n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\,\frac{b_{n-k}}{(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}a_k b_{n-k}$$
$$=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k a_k b_{n-k},$$

消去 $n!$，即得 $c_n$ 的表达式. 在下面的讨论中经常要用到(96).

为什么要称(95)为指数型母函数呢?

我们研究一下每项都是 1 的数列

$$\{a_n\}=\{1,\ 1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ \cdots\},$$

它的指数型母函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

这个母函数在下面的讨论中将起重要作用，我们专门用一个记号 $e(x)$ 来记它，即

$$e(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \tag{97}$$

不难证明下面的

**定理 11** $e(x)e(y)=e(x+y)$.

**证明** 按照定义

$$e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad e(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!},\ e(x+y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!},$$

把 $e(y)$ 改写成

$$e(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{y}{x}\right)^n x^n.$$

于是根据(96)，

$$e(x)e(y)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{y}{x}\right)^n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}x^n,$$

这里 $$c_n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{y}{x}\right)^k=\left(1+\frac{y}{x}\right)^n=\frac{1}{x^n}(x+y)^n,$$

代入上式，即得

$$e(x)e(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}=e(x+y). \tag{98}$$

定理证毕.

对于指数函数 $f(x)=a^x$，我们显然有 $f(x)f(y)=a^x\cdot a^y=a^{x+y}=f(x+y)$. 现在从定理 11 看到，$e(x)$ 具有上述指数函数的性质. 这就是称(95)为指数型母函数的原因.

在定理中，取 $y=x$，就得到 $(e(x))^2=e(2x)$，即

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n.$$

取 $y=-x$，得 $e(x)e(-x)=1$，即

$$\frac{1}{e(x)}=e(-x), \tag{99}$$

或者 $$\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n.$$

这个式子在下面的讨论中也常要用到.

作为指数型母函数的一个应用，我们证明一个有趣的结果.

**定理 12** 设 $\{a_n\}$ 是一个给定的数列，令

$$b_n=a_0-C_n^1a_1+C_n^2a_2-\cdots+(-1)^na_n, \tag{100}$$

则必有

$$a_n=b_0-C_n^1b_1+C_n^2b_2-\cdots+(-1)^nb_n, \tag{101}$$

**证明** 用 $e(x)$ 乘 $\{(-1)^na_n\}$ 的指数型母函数，并利用

(96)得

$$e(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a_n}{n!}x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a_n}{n!}x^n\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k a_k}{n!}\right)x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}x^n.$$

这最后一个等号是根据(100)，于是由(96)和(99)得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a_n}{n!}x^n=\frac{1}{e(x)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}x^n$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}x^n\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}x^n. \tag{102}$$

这里 $c_n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k b_k(-1)^{n-k}=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k b_k,$

比较(102)两边的系数即得

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k b_k,\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

这就是所要证明的.

(100)和(101)称为*组合变换的互逆公式*. 对于给定的数列$\{a_n\}$，通过*组合变换*(100)，产生新的数列$\{b_n\}$. 自然要问，$\{b_n\}$再经过一次组合变换，将变成什么？定理12告诉我们，再变一次又变回到原来的$\{a_n\}$了. 下面是应用这对互逆公式来解决问题的例子.

[例19] 证明

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)=-\frac{1}{n}.$$

**证明** 令$a_0=0$, $a_k=-\frac{1}{k}$, $(k=1, 2, \cdots)$经过组合变换(100)得

$$b_0=0, b_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k\left(-\frac{1}{k}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}C_n^k, \quad (n=1, 2, \cdots)$$

由习题一第11题得知

$$b_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},$$

于是利用反转公式(101),即得

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)=-\frac{1}{n}.$$

这就是要证明的.

如果不用这里的互逆公式，要直接证明这个等式是颇不容易的.

看一个具体的指数型母函数的例子.

从$n$个相异物体中任取$r$个作排列，其所有可能的排列数记为$A_n^r$, 则

$$A_n^r=n(n-1)\cdots(n-r+1)=r!C_n^r.$$

所以数列

$$A_n^0, A_n^1, \cdots, A_n^r, \cdots, A_n^n, 0, 0, \cdots \ (A_n^0=1)$$

的指数型母函数是

$$A_n^0+A_n^1x+\frac{A_n^2}{2!}x^2+\cdots+\frac{A_n^n}{n!}x^n$$
$$=1+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n=(1+x)^n.$$

这说明函数$(1+x)^n$不仅是组合数列

$$C_n^0, C_n^1, \cdots, C_n^n, 0, 0, \cdots$$

的普通母函数,而且还是排列数列

$$A_n^0,\ A_n^1,\ \cdots,\ A_n^n,\ 0,\ 0,\ \cdots$$

的指数型母函数.

从这个例子来看，似乎指数型母函数和排列问题有关，下一节我们就要仔细讨论这个问题.

## 习 题 九

1. 确定下列数列的指数型母函数:

   (i) $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^n, \cdots, a_n=(-1)^n$;

   (ii) $0!, 1!, 2!, \cdots, n!, \cdots, a_n=n!$;

   (iii) $0!, 2\cdot 1!, 2^2\cdot 2!, \cdots, 2^n\cdot n!, \cdots, a_n=2^n n!$.

2. 利用组合变换的互逆公式证明

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (C_{m+k}^m)^{-1} \frac{(-1)^k}{m+k+1}=\frac{1}{m+n+1}.$$

# 十、三类排列问题

我们曾经用母函数的概念成功地处理了三类组合问题，现在能否用指数型母函数的概念来处理排列问题？

和组合问题一样，我们也可提出三类排列问题：

**问题 I** （不许重复的排列）从 $n$ 个相异物体中，每次取出 $r$ 个，不许重复，问有多少种不同的排列法？

**问题 II** （允许无限重复的排列）从 $n$ 个相异物体中，每次取出 $r$ 个作排列，如果允许重复，问有多少种不同的排法？

**问题 III** （允许有限重复的排列）设有 $n$ 个物体，其中有 $n_1$ 个物体 $A_1$，$n_2$ 个物体 $A_2$，…，$n_k$ 个物体 $A_k$，$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$，今从中任取 $r$ 个作排列，问有多少种不同的排法？

问题 I 的解答很简单，所有可能的排列总数为

$$A_n^r=n(n-1)\cdots(n-r+1),$$

特别，当 $r=n$ 时，$n$ 个相异物体的排列总数为

$$A_n^n=n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1=n!,$$

这些我们在中学课本上已经熟悉了.

问题 II 的解法也不困难. 因为允许重复，所以每个排列的 $r$ 个位置上都有可能放上 $n$ 个物体中的任何一个，因此所有可能的排列总数为 $n^r$. 这比相应的组合问题要简单得多.

困难的是问题 III，因为每个物体重复的次数是有限制的，这给问题带来了复杂性. 但如果考虑 $n$ 个物体的全排列，问题还不算难. 因为对每一个排列来说，$n_1$ 个物体 $A_1$，$n_2$ 个物体 $A_2$，…，$n_k$ 个物体 $A_k$ 都出现在排列中. 因为 $n$ 个物体

的全排列总数为$n!$，在这$n!$个排列中有很多排列是一样的，例如$n_1$个物体$A_1$任意交换位置，而其它物体不动，这样得到的排列全是一样的，这种相同的排列有$n_1!$个．同样道理，对物体$A_2, \cdots, A_k$也会发生类似的情况．去掉这些相同的排列后，真正不同的所有可能的排列总数为

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!},$$

因而得

**定理 13** 设有$n$个物体，其中有$n_1$个物体$A_1$，$n_2$个物体$A_2, \cdots, n_k$个物体$A_k$，$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$，这$n$个物体所有可能不同的排列总数为

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}. \tag{103}$$

这就是问题 III 当$r=n$的解答．最困难的是$r<n$的情形，这时没有一般的公式．指数型母函数是解决这类问题的有力工具．

**定理 14** 设有$n$个物体，其中有$n_1$个$A_1$，$n_2$个$A_2, \cdots, n_k$个$A_k$，$n_1+\cdots+n_k=n$．从这样$n$个物体中任取$r$个的不同的排列总数记为$a_r$，那么数列

$$a_0, a_1, \cdots, a_r, \cdots$$

的指数型母函数为

$$f_e(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n_1}}{n_1!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n_2}}{n_2!}\right)$$
$$\cdots\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n_k}}{n_k!}\right). \tag{104}$$

**证明** 让第$i$个括弧代表第$i$个物体$A_i (i=1, 2, \cdots, k)$．在第一个括弧中取出项$\frac{x^3}{3!}$解释为“取出3个物体$A_1$”，在第

二个括弧中取 $\frac{x^4}{4!}$ 解释为"取出 4 个物体 $A_2$"，余同此．我们研究(104)的展开式中 $\frac{x^r}{r!}$ 的系数．在合并同类项前，(104)的展开式中的 $\frac{x^r}{r!}$ 是由各个括弧中的项乘积而得：

$$\frac{x^{m_1}}{m_1!}\frac{x^{m_2}}{m_2!}\cdots\frac{x^{m_k}}{m_k!}=\frac{x^{m_1+m_2+\cdots+m_k}}{m_1!m_2!\cdots m_k!}.$$

这里 $0\leqslant m_1\leqslant n_1$，$0\leqslant m_2\leqslant n_2$，…，$0\leqslant m_k\leqslant n_k$，而且 $m_1+m_2+\cdots+m_k=r$，故上式可改写为

$$\frac{x^{m_1}}{m_1!}\frac{x^{m_2}}{m_2!}\cdots\frac{x^{m_k}}{m_k!}=\frac{r!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}\frac{x^r}{r!}.$$

由此得知，$\frac{x^r}{r!}$ 的系数是

$$\frac{r!}{m_1!m_2!\cdots m_k!},\tag{105}$$

而且 $m_1+m_2+\cdots+m_k=r$．根据定理 13，(105)恰好就是这样 $r$ 个物体的所有可能的排列数：在这 $r$ 个物体中有 $m_1$ 个 $A_1$，$m_2$ 个 $A_2$，…，$m_k$ 个 $A_k$．这说明乘积

$$\frac{x^{m_1}}{m_1!}\frac{x^{m_2}}{m_2!}\cdots\frac{x^{m_k}}{m_k!}$$

就对应一种排列．由于 $m_i(i=1,2,\cdots,k)$可以取遍 0，1，2，…，$n_i(i=1,2,\cdots,k)$中的所有整数，在合并同类项后，$\frac{x^r}{r!}$ 的系数就表示在这样 $n$ 个物体中取出 $r$ 个物体的所有可能的排列总数．这就证明了(104)是$\{a_r\}$的指数型母函数．定理证毕．

[例 20] 有五个数字，其中有两个 1，两个 2，一个 3，问用这五个数字能组成多少个四位数？

**解** 用 $a_r$ 表示组成 $r$ 位数的个数，根据定理 14，$\{a_r\}$的

指数型母函数是

$$f_e(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)(1+x),$$

乘开即得

$$f_e(x)=1+3x+4x^2+3x^3+\frac{5}{4}x^4+\frac{1}{4}x^5$$

$$=1+3x+8\frac{x^2}{2!}+18\frac{x^3}{3!}+30\frac{x^4}{4!}+30\frac{x^5}{5!}.$$

从这展开式知道：能组成 30 个四位数．此外还知道能组成 3 个一位数，8 个两位数，18 个三位数，30 个五位数．

［例 21］ 用 1, 2, 3, 4 四个数字能组成多少个五位数，在这些五位数中，要求 1 出现 2 次或 3 次；2 出现 0 次或 1 次，3 没有限制，4 出现偶数次．

**解** 设用 1, 2, 3, 4 四个数字能组成 $a_r$ 个满足上述条件的 $r$ 位数，那么$\{a_r\}$的指数型母函数是

$$f_e(x)=\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)(1+x)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right)$$
$$\cdot\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right). \tag{106}$$

这里第一个括弧代表数字 1，括弧中是$\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$，当乘积中出现因子 $\frac{x^2}{2!}$ 时，表示 1 出现了两次，出现因子 $\frac{x^3}{3!}$ 时，表示 1 出现了 3 次．第二、三、四个括弧分别代表数字 2、3、4 括弧中出现的式子是根据题意来设计的，例如允许 4 出现偶数次，故第四个括弧中是

$$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots.$$

这样，第四个括弧中出现的都是 $\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 这种因子，即 4 只能

出现偶数次．剩下的问题就是计算(106)的展开式中 $\frac{x^5}{5!}$ 的系数．

注意 $$e(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

$$\frac{1}{e(x)}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

所以

$$e(x)+\frac{1}{e(x)}=2\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right),$$

于是(106)可写为

$$f_e(x)=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)(1+x)e(x)\,\frac{1}{2}\left(e(x)+\frac{1}{e(x)}\right)$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)(1+x)\frac{1}{2}[e(2x)+1]$$

$$=\frac{e(2x)}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4\right),$$

因为第二个括弧中根本没有 $x^5$ 的项，与我们的问题无关，可以不予考虑．注意

$$e(2x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(2x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n,$$

所以 $$\frac{1}{4}x^2e(2x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{4n!}x^{n+2},$$

$$\frac{1}{3}x^3e(2x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3n!}x^{n+3},$$

$$\frac{1}{12}x^4e(2x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{12n!}x^{n+4},$$

把这三个式子中 $x^5$ 的项加在一起得

$$\left(\frac{2^3}{4\cdot 3!}+\frac{2^2}{3\cdot 2!}+\frac{2}{12}\right)x^5=5!\cdot\left(\frac{8}{4!}+\frac{4}{6}+\frac{2}{12}\right)\frac{x^5}{5!},$$

故得五位数的个数为

$$40+80+20=140.$$

[例 22] 有 $n$ 个正方形排成一行. 今用红、白、黑三种颜色给这 $n$ 个正方形染色, 每个正方形只能染一种颜色. 如果要求染白色的正方形必须是偶数个, 问有多少种不同的染法?

**解** 设有 $a_n$ 种不同的染法. 在问题中对红、黑两色没有要求, 而要求白色只能出现偶数次, 因此得$\{a_n\}$的指数型母函数为

$$f_e(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right)$$
$$\cdot\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right)$$
$$\cdot\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right).$$

这里第一、二两个括弧代表红色与黑色, 第三个括弧代表白色. 根据上面的讨论, 有

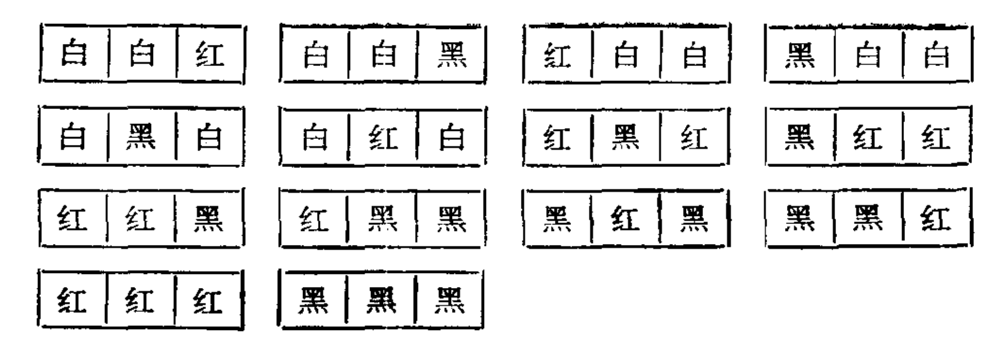
$$f_e(x)=e(x)e(x)\frac{1}{2}\left(e(x)+\frac{1}{e(x)}\right)=\frac{1}{2}[e(3x)+e(x)]$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(3^n+1)\frac{x^n}{n!},$$

由此得 $$a_n=\frac{1}{2}(3^n+1),\quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

如果 $n=3$, 即方格只有三个, 那么不同的染法有

$$a_3=\frac{1}{2}(27+1)=14(\text{种}),$$

它们是:




## 习 题 十

**1**. 用 0, 1, 2, 3, 4 五个数字, 不许重复, 能构成多少个三位数? 其中有多少个偶数?

**2**. 在上题中, 如果允许数字重复, 能构成多少个三位数? 其中有多少个偶数?

**3**. 用 4 个 1 和 2 个 0 能排成多少个六个数的数列?

**4**. 质点从原点出发, 每次沿 $x$ 轴正向或沿 $y$ 轴正向移动一个单位, 问从原点到点(4, 2), 有多少种不同的走法?

**5**. 用 3 个 1, 2 个 2, 5 个 3 这十个数字能构成多少个四位数?

**6**. 用上题十个数字能构成多少个四位数的偶数?

**7**. $n$ 个正方形排成一行. 今用红、白、黑三种颜色给这 $n$ 个正方形染色, 每个正方形只能染一种颜色. 如果要求染这三种颜色的正方形都是偶数个, 问有多少种不同的染法?

# 十一、伯 努 利 数

前面我们曾经用母函数的方法计算过自然数的四次方的和

$$S_n^{(4)}=1^4+2^4+\cdots+n^4,$$

虽然算出来了，但方法不算简便，特别当方幂的次数升高时，计算起来更麻烦. 现在我们从另一个角度出发，利用指数型母函数的思想，给出自然数方幂和的计算公式. 我们分下面几个步骤来做.

(一) 首先我们要找出函数

$$\frac{x}{e(x)-1}$$

作为指数型母函数所生成的数列，即要寻找数列

$$B_0,\ B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_n,\ \cdots,$$

使得

$$\frac{x}{e(x)-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n. \qquad (107)$$

因为

$$\begin{aligned}e(x)-1&=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right)-1\\&=x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\end{aligned}$$

所以(107)可写为

$$\begin{aligned}x=&\left(B_0+B_1x+\frac{B_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{B_n}{n!}x^n+\cdots\right)\\&\cdot\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right).\end{aligned}$$

比较系数，即知 $B_0=1$. 若记 $a_0=0$, $a_n=1(n=1, 2, \cdots)$, 则上式可写为

$$x=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n\right).$$

根据(96), 得

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}x^n, \tag{108}$$

其中

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kB_ka_{n-k}.$$

因为 $a_0=0$, $a_n=1$ $(n=1, 2, \cdots)$, 上式可改写为

$$c_n=\sum_{k=0}^{n-1}C_n^kB_k,$$

比较(108)两端同次幂的系数, 得 $c_n=0(n=2, 3, \cdots)$, 即

$$\sum_{k=0}^{n-1}C_n^kB_k=0, \quad (n=2, 3, \cdots)$$

两端加上 $B_n$, 即得

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^kB_k=B_n. \quad (n=2, 3, \cdots) \tag{109}$$

这就是计算 $B_n$ 的递推公式. 例如令 $n=2$, 得

$$B_0+2B_1+B_2=B_2,$$

所以 $B_1=-\frac{1}{2}$; 令 $n=3$, 得

$$B_0+3B_1+3B_2+B_3=B_3,$$

所以 $B_2=\frac{1}{6}$; 令 $n=4$, 得

$$B_0+4B_1+6B_2+4B_3+B_4=B_4,$$

所以 $B_3=0$; 依次算下去, 可得

$$B_0=1, \ B_1=-\frac{1}{2}, \ B_2=\frac{1}{6}, \ B_3=0,$$

$$B_4=-\frac{1}{30},\ B_5=0,\ B_6=\frac{1}{42},\ B_7=0,$$

$$B_8=-\frac{1}{30},\ B_9=0,\ B_{10}=\frac{5}{66},\ B_{11}=0,$$

$$B_{12}=-\frac{691}{2730},\ B_{13}=0,\ B_{14}=\frac{7}{6},\ \cdots.$$

由此可见，所有 $B_n$ 都是有理数；而且不难证明，除了 $B_1$ 外所有带有奇数足标的都等于 0，即

$$B_{2n+1}=0,\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

事实上，现在(107)可写为

$$\frac{x}{e(x)-1}=1-\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$$

或者

$$\frac{x}{e(x)-1}+\frac{x}{2}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n. \tag{110}$$

把左端的函数记为 $f(x)$，于是

$$f(-x)=\frac{-x}{e(-x)-1}-\frac{x}{2}=\frac{-x}{\dfrac{1}{e(x)}-1}-\frac{x}{2}$$

$$=\frac{-xe(x)}{1-e(x)}-\frac{x}{2}=\frac{x-xe(x)-x}{1-e(x)}-\frac{x}{2}$$

$$=x-\frac{x}{1-e(x)}-\frac{x}{2}=\frac{x}{e(x)-1}+\frac{x}{2}=f(x),$$

这说明 $f(x)$ 是一个偶函数，与多项式的情况相同，(110)右端的幂级数中不能出现 $x$ 的奇次幂，因而

$$B_{2n+1}=0.\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

数列 $\{B_n\}$ 称为伯努利数，在下面的讨论中将起重要作用.

(二)已经知道

$$\frac{x}{e(x)-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n,\quad e(tx)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}x^n,$$

这里 $B_n$ 是伯努利数，$t$ 是任意实数．我们研究由这两指数型母函数的乘积作为指数型母函数所生成的数列 $\beta(t)$：

$$\frac{x}{e(x)-1}e(tx)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}x^n\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_n(t)}{n!}x^n,\qquad(111)$$

根据(96)得

$$\beta_n(t)=\sum_{k=0}^{n}C_n^kB_{n-k}t^k,\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)\qquad(112)$$

这是一个关于 $t$ 的多项式，称为伯努利多项式．由此易知

$$\beta_n(0)=B_n\qquad(113)$$

因为伯努利数已经算出，伯努利多项式也就可以具体写出来，例如

$$\beta_3(t)=\sum_{k=0}^{3}C_3^kB_{3-k}t^k=B_3+3B_2t+3B_1t^2+B_0t^3$$

$$=\frac{t}{2}-\frac{3}{2}t^2+t^3.$$

伯努利多项式 $\beta_n(t)$ 之所以和计算自然数的方幂和有关，是因为它有这样一个性质：

$$\beta_{n+1}(t+1)-\beta_{n+1}(t)=(n+1)t^n,\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)\qquad(114)$$

我们利用指数型母函数来证明这一重要事实．因为由(111)，

$$\frac{xe(tx)}{e(x)-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_n(t)}{n!}x^n,$$

所以
$$\frac{xe((t+1)x)}{e(x)-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_n(t+1)}{n!}x^n,$$

两式相减，并利用定理 11，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_n(t+1)-\beta_n(t)}{n!}x^n=\frac{xe((t+1)x)}{e(x)-1}-\frac{xe(tx)}{e(x)-1}$$

$$=\frac{xe(tx)e(x)-xe(tx)}{e(x)-1}=\frac{xe(tx)(e(x)-1)}{e(x)-1}=xe(tx)$$

$$=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}x^{n+1},$$

比较两边 $x^{n+1}$ 的系数，得

$$\frac{\beta_{n+1}(t)-\beta_n(t)}{(n+1)!}=\frac{t^n}{n!}.$$

消去 $n!$，即得(114)。

(三)有了(114)，事情就好办了．在等式

$$\beta_{k+1}(t+1)-\beta_{k+1}(t)=(k+1)t^k \quad (k=1,\ 2,\ \cdots) \qquad (114)$$

中分别令 $t=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，得

$$\beta_{k+1}(2)-\beta_{k+1}(1)=(k+1)1^k,$$
$$\beta_{k+1}(3)-\beta_{k+1}(2)=(k+1)2^k,$$
$$\beta_{k+1}(4)-\beta_{k+1}(3)=(k+1)3^k,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\beta_{k+1}(n+1)-\beta_{k+1}(n)=(k+1)n^k,$$

把这些式子统统加起来有

$$(k+1)(1^k+2^k+\cdots+n^k)=\beta_{k+1}(n+1)-\beta_{k+1}(1),$$

于是

$$S_n^{(k)}=1^k+2^k+\cdots+n^k=\frac{\beta_{k+1}(n+1)-\beta_{k+1}(1)}{k+1}, \qquad (115)$$

由(113)知道，$\beta_{k+1}(0)=B_{k+1}$，在(114)中令 $t=0$，得

$$\beta_{k+1}(1)-\beta_{k+1}(0)=0,$$

所以 $$\beta_{k+1}(1)=\beta_{k+1}(0)=B_{k+1},$$

又因为 $$\beta_{k+1}(t)=\sum_{r=0}^{k+1}C_{k+1}^{r}B_{k-r+1}t^r,$$

所以(115)可以写为

$$S_n^{(k)} = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$$
$$= \frac{1}{k+1}\left\{\sum_{r=0}^{k+1} C_{k+1}^r B_{k+1-r}(n+1)^r - B_{k+1}\right\}$$
$$= \frac{1}{k+1}\sum_{r=1}^{k+1} C_{k+1}^r B_{k+1-r}(n+1)^r. \qquad (116)$$

这就是我们要找的求自然数方幂和的公式，它是通过伯努利数来表示的.

例如，取 $k=2$，有

$$S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$
$$= \frac{1}{3}[3B_2(n+1) + 3B_1(n+1)^2 + B_0(n+1)^3]$$
$$= \frac{n+1}{6} - \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)^3}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

取 $k=3$，有

$$S_n^{(3)} = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$$
$$= \frac{1}{4}[4B_3(n+1) + 6B_2(n+1)^2 + 4B_1(n+1)^3 + B_0(n+1)^4]$$
$$= \frac{1}{4}[(n+1)^2 - 2(n+1)^3 + (n+1)^4] = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

取 $k=4$，有

$$S_n^{(4)} = 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$$
$$= \frac{1}{5}[5B_4(n+1) + 10B_3(n+1)^2 + 10B_2(n+1)^3$$
$$+ 5B_1(n+1)^4 + B_0(n+1)^5]$$
$$= -\frac{1}{30}(n+1) + \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^4 + \frac{1}{5}(n+1)^5$$
$$= \frac{n+1}{30}[6(n+1)^4 - 15(n+1)^3 + 10(n+1)^2 - 1].$$

公式(116)也可以写成下面的便于记忆的形式:

$$S_n^{(k)}=1^k+2^k+\cdots+n^k$$
$$=\frac{1}{k+1}[B+(n+1)]^{k+1}-\frac{B_{k+1}}{k+1},$$

只要记住在展开二项式$[B+(n+1)]^{k+1}$时，$B$ 的方次都应是 $B$ 的足标就行了.

## 习 题 十 一

1. 验证下列伯努利数的数值:

$$B_4=-\frac{1}{30},\quad B_6=\frac{1}{42},\quad B_8=-\frac{1}{30},$$
$$B_{10}=\frac{5}{66},\quad B_{12}=-\frac{691}{2730},\quad B_{14}=\frac{7}{6}.$$

2. 写出下列伯努利多项式:

$$\beta_4(t),\ \beta_5(t),\ \beta_6(t),$$

并验证关系式(114).

3. 利用公式(116),计算

$$S_n^{(5)}=1^5+2^5+\cdots+n^5,$$
$$S_n^{(6)}=1^6+2^6+\cdots+n^6.$$

# 十二、切比雪夫多项式

前面我们已经看到，作为指数型母函数，$\dfrac{x}{e(x)-1}$ 生成了伯努利数 $B_n$:

$$\frac{x}{e(x)-1}=B_0+B_1x+\frac{B_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{B_n}{n!}x^n+\cdots,$$

$\dfrac{xe(tx)}{e(x)-1}$ 生成了伯努利多项式 $\beta_n(t)$:

$$\frac{xe(tx)}{e(x)-1}=\beta_0(t)+\beta_1(t)x+\frac{\beta_2(t)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\beta_n(t)}{n!}x^n+\cdots,$$

伯努利数和伯努利多项式在数学分析中有许多应用，前面讲到的求自然数方幂和的公式只是其中之一.

数学中有不少重要的特殊函数可以通过相应的母函数产生，这是母函数的一个重要作用．本节介绍的切比雪夫多项式就是这些重要的特殊函数中的一个.

我们来研究把函数

$$\frac{4-x^2}{4-4tx+x^2} \tag{117}$$

作为普通母函数(不是指数型母函数)所生成的函数列．这里分子是一个 $x$ 的多项式；如果把分母中的 $t$ 看作常数，则也是 $x$ 的多项式．我们设法把它展开成 $x$ 的形式幂级数.

因为分子分母都是 $x$ 的二次多项式，故先把它写成

$$\frac{4-x^2}{4-4tx+x^2}=-1+\frac{8-4tx}{4-4tx+x^2}, \tag{118}$$

右边第二项分子是 $x$ 的一次多项式，分母是 $x$ 的二次多项式，因而是个真分式，故可把它写成部分分式(把 $t$ 看成常数)．

为了便于讨论，我们令

$$t=\cos\theta,\ z=\cos\theta+i\sin\theta.$$

这里 $i=\sqrt{-1}$是虚数单位．于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{z}&=\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}\\&=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)}=\cos\theta-i\sin\theta,\end{aligned}$$

所以
$$z+\frac{1}{z}=2\cos\theta=2t.$$

这样一来，(118)右边第二项的分母便可写成

$$\begin{aligned}4-4tx+x^2&=4-2\left(z+\frac{1}{z}\right)x+x^2\\&=4\left(1-\frac{z}{2}x\right)\left(1-\frac{1}{2z}x\right),\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{8-4tx}{4-4tx+x^2}&=\frac{2-tx}{\left(1-\frac{z}{2}x\right)\left(1-\frac{1}{2z}x\right)}\\&=\frac{1}{1-\frac{z}{2}x}+\frac{1}{1-\frac{1}{2z}x},\end{aligned}$$

代入(118)，便得(117)的部分分式展开式：

$$\frac{4-x^2}{4-4tx+x^2}=-1+\frac{1}{1-\frac{z}{2}x}+\frac{1}{1-\frac{1}{2z}x}. \tag{119}$$

注意到

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}x}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}x\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}x^n,$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2z}x}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n z^n}x^n,$$

代入(119)得

$$\begin{aligned}\frac{4-x^2}{4-4tx+x^2}&=-1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n z^n}x^n\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)x^n.\end{aligned}\tag{120}$$

根据棣莫佛公式:

$$z^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta,\tag{121}$$

$$\frac{1}{z^n}=(\cos\theta-i\sin\theta)^n=\cos n\theta-i\sin n\theta,\tag{122}$$

由此得

$$z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta.\tag{123}$$

代入(120)有

$$\frac{4-x^2}{4-4tx+x^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{2^{n-1}}x^n,$$

而 $\cos\theta=t$, $\theta=\arccos t$, 所以

$$\frac{4-x^2}{4-4tx+x^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\arccos t)}{2^{n-1}}x^n.$$

记

$$T_0(t)=1,\quad T_n(t)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos n(\arccos t),\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)\tag{124}$$

这就是由母函数(117)所生成的函数列,称它们为切比雪夫多项式.

何以见得(124)是 $t$ 的多项式呢? 仍用 $\theta=\arccos t$ 代回,

并注意到(121), (122), (123), 就得

$$T_n(t)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos n(\arccos t)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\theta=\frac{1}{2^n}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$$

$$=\frac{1}{2^n}[(\cos\theta+i\sin\theta)^n+(\cos\theta-i\sin\theta)^n]$$

$$=\frac{1}{2^n}[(t+i\sqrt{1-t^2})^n+(t-i\sqrt{1-t^2})^n],$$

利用二项式定理:

$$(t+i\sqrt{1-t^2})^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k t^{n-k}i^k(\sqrt{1-t^2})^k,$$

$$(t-i\sqrt{1-t^2})^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k t^{n-k}(-1)^k i^k(\sqrt{1-t^2})^k,$$

于是

$$T_n(t)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k t^{n-k}i^k(\sqrt{1-t^2})^k[1+(-1)^k],\qquad(125)$$

当 $k$ 取奇数值时, $1+(-1)^k=0$, 故和式中只有 $k$ 取偶数值的那些项. 这样一来, (125)便可写成

$$T_n(t)=\frac{1}{2^n}\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}2C_n^{2r}t^{n-2r}i^{2r}(\sqrt{1-t^2})^{2r}$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r C_n^{2r}(1-t^2)^r t^{n-2r}.\qquad(126)$$

这就证明了 $T_n(t)$ 确实是个多项式, 而且是 $n$ 次多项式. 其中 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 如前所说是表示 $\frac{n}{2}$ 的整数部分, 例如当 $n=8$ 时, $\left[\frac{n}{2}\right]=[4]=4$, 当 $n=9$ 时, $\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{9}{2}\right]=[4.5]=4$.

我们用(126)具体算几个切比雪夫多项式:

$T_1(t)=t,$

$T_2(t)=\frac{1}{2}[t^2-(1-t^2)]=\frac{1}{2}(2t^2-1)=t^2-\frac{1}{2},$

$$T_3(t)=\frac{1}{4}[t^3-3(1-t^2)t]=\frac{1}{4}(4t^3-3t)=t^3-\frac{3}{4}t,$$

$$T_4(t)=\frac{1}{8}[t^4-6(1-t^2)t^2+(1-t^2)^2]$$

$$=\frac{1}{8}(8t^4-8t^2+1)=t^4-t^2+\frac{1}{8},$$

…………

再往下算就越来越麻烦. 其实我们可以利用它的母函数, 推导出 $T_n(t)$ 之间的递推关系,使计算变得较为简单.

由于

$$\frac{4-x^2}{4-4tx+x^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)x^n$$

$$=1+T_1(t)x+T_2(t)x^2+\sum_{n=3}^{\infty}T_n(t)x^n, \quad (127)$$

$$\frac{tx(4-x^2)}{4-4tx+x^2}=tx+\sum_{n=1}^{\infty}tT_n(t)x^{n+1}=tx+\sum_{n=2}^{\infty}tT_{n-1}(t)x^n$$

$$=tx+tT_1(t)x^2+\sum_{n=3}^{\infty}tT_{n-1}(t)x^n, \quad (128)$$

$$\frac{x^2(4-x^2)}{4(4-4tx+x^2)}=\frac{x^2}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}T_n(t)x^{n+2}$$

$$=\frac{x^2}{4}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{4}T_{n-2}(t)x^n, \quad (129)$$

(127) − (128) + (129), 得

$$\frac{4-x^2-tx(4-x^2)+\frac{1}{4}x^2(4-x^2)}{4-4tx+x^2}$$

$$=1-\frac{1}{4}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\left[T_n(t)-tT_{n-1}(t)+\frac{1}{4}T_{n-2}(t)\right]x^n, \quad (130)$$

上式左边的分子显然为

$$(4-x^2)\left(1-tx+\frac{1}{4}x^2\right)=\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)(4-4tx+x^2),$$

因而(130)可写为

$$1-\frac{1}{4}x^2=1-\frac{x^2}{4}+\sum_{n=3}^{\infty}\Big[T_n(t)-tT_{n-1}(t)+\frac{1}{4}T_{n-2}(t)\Big]x^n,$$

即
$$\sum_{n=3}^{\infty}\Big[T_n(t)-tT_{n-1}(t)+\frac{1}{4}T_{n-2}(t)\Big]x^n=0.$$

因而 $x^n$ 的系数都必须为 0，于是得计算 $T_n(t)$ 的递推公式：

$$T_n(t)=tT_{n-1}(t)-\frac{1}{4}T_{n-2}(t),\quad (n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots) \tag{131}$$

从这个公式计算 $T_n(t)$ 就比较方便了．例如从 $T_3(t)$，$T_4(t)$ 很容易算出

$$T_5(t)=tT_4(t)-\frac{1}{4}T_3(t)=t\Big(t^4-t^2+\frac{1}{8}\Big)-\frac{1}{4}\Big(t^3-\frac{3}{4}t\Big)$$
$$=t^5-\frac{5}{4}t^3+\frac{5}{16}t,$$

从 $T_4(t)$，$T_5(t)$ 又很容易算出 $T_6(t)$：

$$T_6(t)=tT_5(t)-\frac{1}{4}T_4(t)$$
$$=t\Big(t^5-\frac{5}{4}t^3+\frac{5}{16}t\Big)-\frac{1}{4}\Big(t^4-t^2+\frac{1}{8}\Big)$$
$$=t^6-\frac{3}{2}t^4+\frac{9}{16}t^2-\frac{1}{32}.$$

从递推公式(131)还很容易看出一个事实：所有切比雪夫多项式 $T_n(t)$ 的最高次项的系数都是 1．但要从切比雪夫多项式的表达式(126)来作出这一结论并不太简单．

切比雪夫多项式有许多有趣的性质，这里只讨论其中较为重要的一个．为了说清楚这一重要性质，要引进几个新概念．

我们把满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 $x$ 的全体称为一个闭区间，记为 $[a, b]$. 例如 $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ 表示满足不等式 $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$ 的实数 $x$ 的全体，$[-1, 1]$ 表示满足不等式 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 的实数 $x$ 的全体.

把所有首项系数为 1 的 $n$ 次多项式的全体记为 $H_n$, 那么对于任意实数 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$,

$$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

都是 $H_n$ 中的多项式. 我们用 $P(x) \in H_n$ 表示 $P(x)$ 是 $H_n$ 中的多项式. 例如 $Q(x)=x^4+3x^2-x+5$, 则 $Q(x) \in H_4$. 由于 $T_n(t)$ 是首项系数为 1 的 $n$ 次多项式，所以 $T_n(t) \in H_n$.

设 $f(t)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的任一函数，当 $t$ 由 $a$ 变到 $b$ 时，$|f(t)|$ 也跟着变化，设 $|f(t)|$ 的最大值是 $M$, 我们把它记为

$$M=\max_{a \leqslant t \leqslant b}|f(t)|,$$

上式可改写为

$$M=\max_{a \leqslant t \leqslant b}|f(t)-0|.$$

因此也称 $M$ 为函数 $f(t)$ 与 0 在区间 $[a, b]$ 上的偏差.

现在设 $P(t)$ 是 $H_n$ 中任一多项式，$P(t)$ 与 0 在 $[-1, 1]$ 上的偏差设为 $M_P$, 即

$$M_P=\max_{-1 \leqslant t \leqslant 1}|P(t)|.$$

显然，$M_P$ 是随着多项式 $P(t)$ 的不同而变化的一个正数，即对于不同的 $P(t)$, 它与 0 的偏差也是不同的. 我们问，$H_n$ 中哪一个多项式与 0 的偏差最小？ 下面将要证明，这个与 0 偏差最小的多项式就是切比雪夫多项式.

**定理 15** 在最高次项系数为 1 的所有 $n$ 次多项式中，在

闭区间$[-1, 1]$上与0有最小偏差的多项式是切比雪夫多项式

$$T_n(t)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos t).$$

**证明** 我们先研究一下，在$[-1, 1]$上$T_n(t)$与0的偏差等于什么．令

$$\theta_0=\pi,\ \theta_1=\frac{n-1}{n}\pi,\ \ \theta_2=\frac{n-2}{n}\pi,\ \cdots,$$

$$\theta_k=\frac{n-k}{n}\pi,\ \cdots,\ \theta_n=0,$$

那么

$$\cos n\theta_k=\cos(n-k)\pi=(-1)^{n-k},\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

取$t_k=\cos\theta_k$，则有$-1=t_0<t_1<\cdots<t_k<\cdots<t_n=1$，这时$\theta_k=\arccos t_k$，于是

$$T_n(t_k)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos t_k)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\theta_k$$

$$=\frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-1}},\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)\qquad (132)$$

因而 $$|T_n(t_k)|=\frac{1}{2^{n-1}},\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

另一方面，对于$[-1, 1]$中所有$t$，都有

$$|T_n(t)|=\frac{1}{2^{n-1}}|\cos(n\arccos t)|\leqslant\frac{1}{2^{n-1}},$$

所以 $$\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|T_n(t)|=\frac{1}{2^{n-1}},$$

即$T_n(t)$在$[-1, 1]$上与0的偏差是$\frac{1}{2^{n-1}}$．如果存在$Q(t)\in H_n$，而且它与0的偏差比$T_n(t)$与0的偏差更小，即

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|Q(t)|<\frac{1}{2^{n-1}},$$

我们要由此推出矛盾．事实上，由于

$$|Q(t_k)| \leqslant \max_{-1<t<1} |Q(t)| < \frac{1}{2^{n-1}}$$

而 $|T_n(t_k)| = \frac{1}{2^{n-1}}$，所以 $T_n(t_k) - Q(t_k)$ 与 $T_n(t_k)$ 的符号是一致的．由(132)知道，

$$T_n(t_0),\ T_n(t_1),\ \cdots,\ T_n(t_n)$$

中的任何相邻两项都是异号的，因而

$$T_n(t_0) - Q(t_0),\ T_n(t_1) - Q(t_1),\ \cdots,\ T_n(t_n) - Q(t_n)$$

的任何相邻两项也是异号的．如果记

$$h(t) = T_n(t) - Q(t),$$

那么

$$h(t_0),\ h(t_1),\ \cdots,\ h(t_n)$$

的任何相邻两项是异号的．由于当 $t$ 从 $t_0$ 变到 $t_1$ 时，$h(t)$ 是连续变化的，既然 $h(t_0)$ 和 $h(t_1)$ 异号，那么或者 $h(t)$ 由正的 $h(t_0)$ 变到负的 $h(t_1)$，或者由负的 $h(t_0)$ 变到正的 $h(t_1)$，不论何者发生，$h(t)$ 在由负到正或由正到负，中间必须经过零值，即在 $[t_0, t_1]$ 中必有 $c_1$，使 $h(c_1)=0$；同样道理，在 $[t_1, t_2]$ 中必有 $c_2$，使 $h(c_2)=0$，$\cdots$，在 $[t_{n-1}, t_n]$ 中有 $c_n$，使 $h(c_n)=0$．换句话说，我们找到了代数方程式 $h(t)=0$ 的 $n$ 个不同的根：

$$c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n.$$

再来看一下 $h(t)=0$ 是多少次的代数方程式．由于 $T_n(t)$ 和 $Q(t)$ 都是首项系数为 1 的 $n$ 次多项式，因而

$$h(t) = T_n(t) - Q(t)$$

便是 $n-1$ 次多项式，它不可能有 $n$ 个不同的根，这是矛盾．这个矛盾的得来是因为我们假定了存在与 0 的偏差比 $T_n(t)$ 与 0 的偏差更小的 $Q(t)$，从而证明了 $T_n(t)$ 是 $H_n$ 中与 0 偏差最小的多项式．证毕．

从这个定理马上得到下面的推论：

对于任意最高次项系数为1的 $n$ 次多项式 $P(x)$，必有

$$\max_{-1<x<1}|P(x)|\geqslant\frac{1}{2^{n-1}}.$$

例如，当 $n=3$ 时，我们便有这样的结论：

对于任意的 $a_0$, $a_1$, $a_2$, 必有

$$\max_{-1<x<1}|x^3+a_2x^2+a_1x+a_0|\geqslant\frac{1}{4}.$$

要直接证明这样的结果并不是很容易的。

# 习题解答概要

**习题一解答**

**1**. 在公式

$$(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^{n-1}x^{n-1}+x^n$$

中令 $x=2$ 即得。

**2**. 已知

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n, \tag{1}$$

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^nC_n^n=0, \tag{2}$$

如果 $n$ 为偶数，则(2)可写为

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots+C_n^n=0. \tag{3}$$

(1)－(3)得 $\quad C_n^1+C_n^3+\cdots+C_n^{n-1}=2^{n-1};$

若 $n$ 为奇数，则(2)为

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots-C_n^n=0, \tag{4}$$

(1)－(4)得 $\quad C_n^1+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^{n-1}.$

**3**. $$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}. \tag{5}$$

这个简单的等式在证明其它一些组合等式时将起重要作用。

**4**. 把第3题的等式(5)写成

$$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}, \quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

于是 $\quad C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=n(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+\cdots+C_{n-1}^{n-1})=n2^{n-1}.$

**5**. 已知

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n,$$

由第4题的结果知

$$C_n^1+2C_n^2+\cdots+nC_n^n=n2^{n-1},$$

两式相加即得所要证之结果。

**6**.
$$\begin{aligned}&C_n^0+3C_n^1+5C_n^2+7C_n^3+\cdots+(2n+1)C_n^n\\&=2(C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n)+(C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n)\\&=2\cdot n2^{n-1}+2^n=2^n(n+1).\end{aligned}$$

**7**. 还利用第3题的等式

$$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}, \quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

$$C_n^1-2C_n^2+3C_n^3-\cdots+(-1)^{n-1}nC_n^n$$
$$=n(C_{n-1}^0-C_{n-1}^1+C_{n-1}^2-\cdots+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1})=0.\quad(n>1)$$

**8**．根据等式(5)可得

$$\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1},\tag{6}$$

于是

$$1+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\cdots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{1}{n+1}(C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+\cdots+C_{n+1}^{n+1})$$
$$=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1).$$

**9**．据等式(6)，

$$C_n^0-\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2-\frac{1}{4}C_n^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n$$
$$=\frac{1}{n+1}(C_{n+1}^1-C_{n+1}^2+C_{n+1}^3-\cdots+(-1)^nC_{n+1}^{n+1})=\frac{1}{n+1}.$$

**10**．由等式(6)及第1题即得．

**11**．用数学归纳法．$n=1$命题显然成立．今设$n=k$时等式成立，即

$$C_k^1-\frac{1}{2}C_k^2+\frac{1}{3}C_k^3-\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{k}C_k^k=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}$$

要证$n=k+1$时等式也成立．

$$C_{k+1}^1-\frac{1}{2}C_{k+1}^2+\frac{1}{3}C_{k+1}^3-\cdots+(-1)^k\frac{1}{k+1}C_{k+1}^{k+1}$$
$$=(C_k^0+C_k^1)-\frac{1}{2}(C_k^1+C_k^2)+\frac{1}{3}(C_k^2+C_k^3)-\cdots+\frac{(-1)^k}{k+1}C_k^k$$
$$=\left(C_k^0-\frac{1}{2}C_k^1+\frac{1}{3}C_k^2-\cdots+(-1)^k\frac{1}{k+1}C_k^k\right)$$
$$+\left(C_k^1-\frac{1}{2}C_k^2+\frac{1}{3}C_k^3+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{k}C_k^k\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}.$$

最后的等式是由归纳假设及第9题而得．

**12**．对$m$行数学归纳法．当$m=0$时，这就是第9题已经证明的结果$(0!=1)$．今设$m=k$时命题对所有自然数$n$成立，即

$$\frac{1}{k+1}C_n^0-\frac{1}{k+2}C_n^1+\frac{1}{k+3}C_n^2-\cdots+\frac{(-1)^n}{k+n+1}C_n^n=\frac{n!k!}{(n+k+1)!}$$

我们证明$m=k+1$时，命题也对所有自然数$n$成立．事实上

$$\frac{1}{k+2}C_n^0-\frac{1}{k+3}C_n^1+\frac{1}{k+4}C_n^2-\cdots+\frac{(-1)^n}{k+n+2}C_n^n$$
$$=\frac{1}{k+2}(C_{n+1}^1-C_n^1)-\frac{1}{k+3}(C_{n+1}^2-C_n^2)+\frac{1}{k+4}(C_{n+1}^3-C_n^3)$$

$$-\cdots+\frac{(-1)^n}{k+n+2}C_{n+1}^{n+1}$$

$$=\frac{1}{k+1}C_n^0-\frac{1}{k+2}C_n^1+\frac{1}{k+3}C_n^2-\cdots+\frac{(-1)^n}{k+n+1}C_n^n$$

$$-\left(\frac{1}{k+1}C_{n+1}^0-\frac{1}{k+2}C_{n+1}^1+\frac{1}{k+3}C_{n+1}^2-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{k+n+2}C_{n+1}^{n+1}\right)$$

$$=\frac{n!k!}{(n+k+1)!}-\frac{(n+1)!k!}{(n+k+2)!}=\frac{(n+k+2)\cdot n!k!-(n+1)!k!}{(n+k+2)!}$$

$$=\frac{n!(k+1)!}{(n+k+2)!}.$$

这就证明了 $m=k+1$ 时命题成立，因而对所有自然数 $m$, $n$ 成立.

**13.** 因为

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n,$$
$$x(1+x)^n=C_n^0x+C_n^1x^2+C_n^2x^3+\cdots+C_n^nx^{n+1},$$

两式相乘

$$x(1+x)^{2n}=(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n)(C_n^0x+C_n^1x^2+\cdots+C_n^nx^{n+1})$$

右端 $x^n$ 的系数是

$$C_n^0C_n^{n-1}+C_n^1C_n^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}C_n^0=C_n^0C_n^1+C_n^1C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}C_n^n,$$

左端 $x^n$ 的系数是

$$C_{2n}^{n-1}=\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

故等式成立.

**14.** 和上题证法相同.

**15.** $(1+x)^{n+1}=1+C_{n+1}^1x+\cdots+C_{n+1}^{r+1}x^{r+1}+\cdots+C_{n+1}^{n+1}x^{n+1}$,

另一方面

$$(1+x)^{n+1}=(1+x)(1+x)^n=(1+x)(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^rx^r+\cdots+C_n^nx^n)$$
$$=1+(C_n^0+C_n^1)x+\cdots+(C_n^r+C_n^{r+1})x^{r+1}+\cdots+x^{n+1},$$

比较两式 $x^{r+1}$ 的系数，即得

$$C_n^r+C_n^{r+1}=C_{n+1}^{r+1}.$$

**16.** 设有 $m+n$ 个相异的物体，从中任取 $r$ 个，所有可能的不同取法的总数为 $C_{m+n}^r$，这 $C_{m+n}^r$ 种不同的取法可以通过下述步骤实现：把 $m+n$ 个物体分成甲、乙两堆，甲堆有 $m$ 个物体，乙堆有 $n$ 个物体．先在甲堆任取 $r$ 个物体，则不同的取法有 $C_m^r$ 种，乙堆不取；再在甲堆取 $r-1$ 个，乙堆取 1 个，这样所有可能的取法有 $C_m^{r-1}C_n^1$ 种；再在甲堆取 $r-2$个，乙堆取 2 个，则所有可能的取法有 $C_m^{r-2}C_n^2$，依次类推，即得所要证之等式.

习题二解答

**1.** (i) $1^2+2^2+\cdots+10^2$;  (ii) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{10\cdot 11}$;

(iii) $a_0b_8+a_1b_7+\cdots+a_8b_0$.

**2.** 把和式写开来就行了.

**3.** (i) $\frac{1}{1+x}$; (ii) $\frac{1}{(1-x)^2}$; (iii) $\frac{x}{(1-x)^2}$; (iv) $\frac{1}{(1+x)^2}$;

(v) $\frac{1}{1+2x}$; (vi) $\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$; (vii) $\frac{1}{1-5x}$; (viii) $\frac{2x}{(1-x)^3}$;

(ix) $\frac{x^3}{1+x}$; (x) $\frac{5-4x}{(1-x)^2}$.

**4.** 因为

$$\frac{1}{(1-x)^3}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{n+2}^2x^n.$$

所以

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=\frac{x}{(1-x)^3}+\frac{x^2}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+2}^2x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+2}^2x^{n+2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}C_{n+1}^2x^n+\sum_{n=2}^{\infty}C_n^2x^n$$

$$=x+\sum_{n=2}^{\infty}(C_{n+1}^2+C_n^2)x^n=x+\sum_{n=2}^{\infty}n^2x^n.$$

**5.** (i) $xf(x)$; (ii) $\frac{1}{x}(f(x)-a_0)$.

**6.** 见第九节.

**7.** 见第九节.

**8.** 先算出$\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(1+1+\cdots+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$,再算$\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)^3$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}[1+2+\cdots+(n+1)]x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n.$$

**9.** 以习题一第 6 题为例. 这个等式用 $\sum$ 记号可写为

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)C_n^k=2^n(n+1),$$

运用 $\sum$ 记号,证明变得很简洁:

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)C_n^k=\sum_{k=0}^{n}2kC_n^k+\sum_{k=0}^{n}C_n^k=2\sum_{k=0}^{n}kC_n^k+\sum_{k=0}^{n}C_n^k$$

$$=2n2^{n-1}+2^n=2^n(n+1).$$

**10.** 利用母函数

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{n+k}^nx^k,\quad \frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$$

即得.

习题三解答

**2**. 可以确定 $C_{10}^2=45$ 条直线；确定 $C_{10}^3=120$ 个三角形.

**3**. 这相当于从 6 个相异物体中每次可以无限重复地取出 8 个的组合的取法的总数，它等于

$$C_{n+r-1}^r=C_{6+8-1}^8=C_{13}^8=C_{13}^5=1287.$$

**4**. 今设 $r$ 个物体中至少有 $n$ 种物体各出现一次，剩下的 $r-n$ 个物体便没有什么限制了，因此它相当于从 $n$ 个相异的物体中允许无限重复地取出 $r-n$ 个的所有可能的组合数，它等于

$$C_{n+(r-n)-1}^{r-n}=C_{r-1}^{r-n}=C_{r-1}^{n-1}.$$

**5**. 设从中任取 $r$ 个的取法总数为 $a_r$，则 $a_r$ 的母函数为

$$(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)$$

展开式中 $x^8$ 的系数 $a_8$ 就是我们要求的. 直接计算得

$$(1+2x+3x^2+4x^3+3x^4+2x^5+x^6)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6).$$

所以 $$a_8=3+4+3+2+1=13.$$

**6**. 设 $a_r$ 是在满足题设要求的前提下，每次取出 $r$ 个球的不同取法的总数，则 $a_r$ 的母函数为

$$(x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3)(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6),$$

把它乘开 $$(x+2x^2+3x^3+3x^4+2x^5+x^6)(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6),$$

所以 $$a_8=2+3+3+2+1=11.$$

**7**. 和第 5 题一样，13 种.

**8**. 和第 6 题一样，11 种.

**9**. 重量不超过 63 克的物体都能称，而且都只有一种称法；重量大于 63 克的物体不能称.

**10**. 设用这 8 枚砝码称 $r$ 克重的物体有 $a_r$ 种称法，则 $a_r$ 的母函数为

$$Q(x)=(1+x+x^2)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^5+x^{10}+x^{15}).$$

把它展开得

$$Q(x)=1+x+2x^2+x^3+2x^4+2x^5+3x^6+3x^7+2x^8+2x^9+2x^{10}$$
$$+3x^{11}+3x^{12}+2x^{13}+2x^{14}+2x^{15}+3x^{16}+3x^{17}+2x^{18}$$
$$+2x^{19}+x^{20}+2x^{21}+x^{22}+x^{23}.$$

由此即知用这 8 枚砝码能称所有重量不超过 23 克的物体，重量超过 23 克的物体不能称. 称的方法数各不相同，如 7 克重的物体有 3 种不同的称法，而 22 克重的物体只有一种称法等. 一般地称 $r$ 克物体的方法数即 $Q(x)$ 中 $x^r$ 的系数.

**11**. 这题有两种不同的解法.

**解法 1** 先从 9 个球中拿走红、白、黑各一个，剩下的 6 个球是从红、白、黑各 7 个(共 21 个球)中取出的，由于每种颜色的球都多于 6 个，故可看成从 3 种球中允许无限重复地取出 6 个球的取法，它的总数等于

$$C_{3+6-1}^{6}=C_{8}^{2}=28.$$

**解法 2** 直接用母函数解. 设从中取出 $r$ 个的取法的总数为 $a_r$，则 $a_r$ 的母函数为

$$f(x)=(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8)^3$$

计算它的展开式中 $x^9$ 的系数. 注意

$$f(x)=x^3(1+x+\cdots+x^7)^3=x^3\left(\frac{1-x^8}{1-x}\right)^3$$

$$=\frac{x^3(1-3x^8+3x^{16}-x^{24})}{(1-x)^3}$$

$$=x^3(1-3x^8+3x^{16}-x^{24})\sum_{r=0}^{\infty}C_{r+2}^{2}x^r,$$

由此可知 $x^9$ 的系数为

$$a_9=C_8^2=28.$$

**习题四解答**

**1.** $\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}$.

**2.** $\dfrac{1}{2(x-2)^3}+\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{3(x-2)}$.

**3.** $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{x+3}$.

**4.** $\dfrac{5}{1-2x}-\dfrac{4}{1-3x}$.

**习题五解答**

**1.** 这个问题有两种解法:

**解法 1** 作变换

$$x_1=y_1+1,\ x_2=y_2+1,\ \cdots,\ x_n=y_n+1,$$

原方程变为 $$y_1+y_2+\cdots+y_n=r-n.$$

当 $x_1, \cdots, x_n$ 取正整数值时，$y_1, \cdots, y_n$ 取非负整数值，这样问题就变成求上面关于 $y_1, \cdots, y_n$ 的方程的非负整数解的个数，由定理 6 知道，非负整数解的个数为

$$C_{n+(r-n)-1}^{r-n}=C_{r-1}^{r-n}=C_{r-1}^{n-1}.$$

这就是原方程的正整数解的个数。

**解法 2** 设方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$ 的正整数解的个数为 $a_r$，则 $a_r$ 的母函数为

$$(x+x^2+x^3+\cdots+x^r+\cdots)(x+x^2+\cdots+x^r+\cdots)\cdots(x+x^2+\cdots+x^r+\cdots)$$

$$=\frac{x}{1-x}\cdot\frac{x}{1-x}\cdot\cdots\cdot\frac{x}{1-x}=\frac{x^n}{(1-x)^n}$$

$$=x^n\sum_{r=0}^{\infty}C_{n+r-1}^{r}x^r=\sum_{r=0}^{\infty}C_{n+r-1}^{n-1}x^{n+r}=\sum_{r=n}^{\infty}C_{r-1}^{n-1}x^r,$$

由此即得
$$a_r=C_{r-1}^{n-1}.$$

**2**. 这题也有两种解法:

**解法 1** 作变换

$$x=X+2,\ y=Y+2,\ z=Z+2$$

原方程变为
$$X+Y+Z=18,$$

问题变为求它的非负整数解的个数，由定理 6 得解数为

$$C_{18+3-1}^{18}=C_{20}^{2}.$$

**解法 2** 设 $x+y+z=r$ 的大于 1 的整数解的个数为 $a_r$，则 $a_r$ 的母函数为

$$(x^2+x^3+\cdots+x^r+\cdots)(x^2+x^3+\cdots+x^r+\cdots)(x^2+x^3+\cdots+x^r+\cdots)$$

$$=\frac{x^2}{1-x}\cdot\frac{x^2}{1-x}\cdot\frac{x^2}{1-x}=\frac{x^6}{(1-x)^3}$$

$$=x^6\sum_{r=0}^{\infty}C_{r+2}^{r}x^r=\sum_{r=0}^{\infty}C_{r+2}^{2}x^{6+r}=\sum_{r=6}^{\infty}C_{r-4}^{2}x^r$$

所以
$$a_{24}=C_{20}^{2}.$$

**3**. 作变换

$$x=X-4,\ y=Y-4,\ z=Z-4,$$

问题变为求方程

$$X+Y+Z=13$$

的非负整数解的个数，它等于

$$C_{13+3-1}^{13}=C_{15}^{2}=105.$$

**4**. 作变换

$$x=X+2,\ y=Y+3,\ z=Z+4,$$

问题就变成求方程

$$X+Y+Z=15$$

的非负整数解的个数，它等于

$$C_{3+15-1}^{2}=C_{17}^{2}=136.$$

**5**. 第一个方程非负整数解的个数为

$$C_{7+13-1}^{6}=C_{19}^{6},$$

第二个方程非负整数解的个数为

$$C_{14+6-1}^{13}=C_{19}^{6}$$

两者相等.

**6**. 根据第 1 题的结果,直接计算即得.

**7**. $C_{r-a_1-a_2-\cdots-a_r-1}^{n-1}$.

**8**. 这个问题相当于问有多少个三位数其数字之和为 5; 有多少个四位数,其数字之和为 5; 有多少个五位数,其数字之和为 5; 有多少个六位数,其数字之和为 5. 这些数目的总和就是 100 和 1000000 之间数字之和为 5 的整数个数. 这样,问题就归结为求

$$x_1+x_2+x_3=5,$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4=5,$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=5,$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=5$$

等方程的非负整数解的个数,但每个方程必须要求 $x_1\geqslant1$, 这就相当于求

$$x_1+x_2+x_3=4,$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4=4,$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=4,$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=4$$

的非负整数解个数的总和,它等于

$$C_6^2+C_7^3+C_8^4+C_9^5=246.$$

**9**. 数字之和小于 5 的整数个数为

$$C_5^2+C_6^3+C_7^4+C_8^5+C_4^2+C_5^3+C_6^4+C_7^5+C_3^2+C_4^3+C_5^4+C_6^5+C_2^2+C_3^3+C_4^4+C_5^5=195,$$

在这 195 个数中包含 100 这个数在内,如果不算这个数,则为 194 个.

**10**. 这相当于求方程 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=20$ 的非负整数解的个数, 它等于

$$C_{25}^5=53130.$$

**11**. 11628.

**12**. 设方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=r$, 满足条件 $x_1\leqslant9$, $x_2\leqslant8$, $x_3\leqslant7$, $x_4\leqslant6$ 的正整数解的个数为 $a_r$, 则 $a_r$ 的母函数为

$$(x+x^2+\cdots+x^9)(x+x^2+\cdots+x^8)(x+x^2+\cdots+x^7)(x+x^2+\cdots+x^6),$$

展开式中 $x^{23}$ 的系数 $a_{23}$ 就是问题的解答. $a_{23}$ 也就是

$$f(x)=(1+x+\cdots+x^8)(1+x+\cdots+x^7)(1+x+\cdots+x^6)(1+x+\cdots+x^5)$$

的展开式中 $x^{19}$ 的系数. 上式等于

$$f(x)=\frac{(1-x^9)(1-x^8)(1-x^7)(1-x^6)}{(1-x)^4}$$

因为
$$\frac{1}{(1-x)^4}=\sum_{r=0}^{\infty}C_{r+3}^3x^r,$$

把 $f(x)$ 的分子乘出来，并去掉次数高于19次的项，问题就变成求

$$(1-x^6-x^7-x^8-x^9+x^{13}+x^{14}+2x^{15}+x^{16}+x^{17})\sum_{r=0}^{\infty}C_{r+3}^3x^r$$

展开式中 $x^{19}$ 的系数，易知它等于

$$C_{22}^3-C_{16}^3-C_{15}^3-C_{14}^3-C_{13}^3+C_9^3+C_8^3+2C_7^3+C_6^3+C_5^3$$
$$=1540-560-455-364-286+84+56+70+20+10=115.$$

**13**. 作变换

$$x=X,\ y=Y,\ z=Z-1$$

问题就变为求方程

$$X+Y+Z=25$$

的整数解的个数，要求

$$1\leqslant X\leqslant 5,\ 12\leqslant Y\leqslant 18,\ 0\leqslant Z\leqslant 13.$$

设 $a_r$ 是方程 $X+Y+Z=r$ 的满足上述要求的整数解的个数，那么 $a_r$ 的母函数是

$$f(x)=(x+x^2+x^3+x^4+x^5)(x^{12}+x^{13}+x^{14}+x^{15}+x^{16}+x^{17}+x^{18})$$
$$\cdot(1+x+x^2+\cdots+x^{13})$$

易知 $f(x)$ 可写为

$$f(x)=x^{13}\frac{(1-x^5)(1-x^7)(1-x^{14})}{(1-x)^3}$$
$$=x^{13}(1-x^5-x^7+x^{12}-x^{14}+x^{19}+x^{21}-x^{26})\sum_{r=0}^{\infty}C_{r+2}^2x^r$$

于是得知 $x^{25}$ 的系数 $a_{25}$ 为

$$a_{25}=C_{14}^2-C_9^2-C_7^2+C_2^2=91-36-21+1=35.$$

**14**. 设不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_s=r$ 的满足条件

$$x_1\leqslant n_1,\ x_2\leqslant n_2,\ \cdots,\ x_s\leqslant n_s$$

的非负整数解的个数为 $b_r$，则 $a_r$ 和 $b_r$ 的母函数相同，因而

$$a_r=b_r.$$

**15**. 和第12题完全一样，只是形式上不同.

**16**. 设 $a_n$ 是把 $n$ 分拆为不等的正整数之和的分拆数，则 $a_n$ 的母函数为

$$f(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots,$$

设 $b_n$ 是把 $n$ 分拆为奇数之和的分拆数，则 $b_n$ 的母函数为

$$g(x)=(1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^3+(x^3)^2+\cdots)(1+x^5+(x^5)^2+\cdots)\cdots$$
$$=\frac{1}{1-x}\,\frac{1}{1-x^3}\,\frac{1}{1-x^5}\cdots.$$

由于

$$f(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots=\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdots.$$

$$=\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}\cdots=g(x).$$

故有

$$a_n=b_n.$$

**17**. 由例12知，这个分拆总数等于最接近 $\frac{(50+3)^2}{12}$ 的那个整数。因为

$$\frac{53^2}{12}\approx 234.08,$$

故分拆总数为234个。

**18**. 140种。

**习题六解答**

**1**. $a_n=2^n-1$.

**2**. $a_n=1+\frac{n(n-1)}{2}$.

**3**. $a_n=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$.

**4**. $a_n=\frac{1}{2}(9n-n^2)$.

**5**. $a_n=\frac{1}{12}[-3+4\cdot 3^n-(-1)^n 3^n]$.

**6**. $a_n=\frac{8}{9}-\frac{6}{9}n+\frac{1}{9}(-2)^n$.

**7**. $a_n=2^n-n$.

**8**. 设能构造 $a_n$ 个 $n$ 位数。容易知道，$a_1=3$，$a_2=8$，当 $n\geqslant 3$ 时，如果 $n$ 位数的第一个数字是2或3，那么这样的 $n$ 位数有 $2a_{n-1}$ 个；如果 $n$ 位数的第一个数字是1，那么第二个数字只能是2或3，因而这样的 $n$ 位数有 $2a_{n-2}$ 个，于是得递推关系

$$a_n=2a_{n-1}+2a_{n-2},\quad (n=3,\ 4,\ \cdots)$$

这是一个二阶线性循环数列。如果规定 $a_0=1$，那么 $a_0$，$a_1$，$a_2$ 满足上述关系。现在只要求 $a_0=1$，$a_1=3$，且满足递推关系

$$a_n=2a_{n-1}+2a_{n-2}$$

的 $a_n$。易知它的特征多项式为 $1-2x-2x^2$，$b_0=a_0=1$，$b_1=3-2=1$；故得 $a_n$ 的母函数为

$$f(x)=\frac{1+x}{1-2x-2x^2},$$

分解为部分分式并展开成形式幂级数得

$$\frac{1+x}{1-2x-2x^2}=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\frac{1}{1-(1+\sqrt{3})x}+\frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}\frac{1}{1-(1-\sqrt{3})x}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n+\frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n\right\}x^n.$$

所以

$$a_n=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n+\frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n.\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

**9**. 设有 $a_n$ 种不同的染法. 易知 $a_1=2$, $a_2=3$, 和上题一样讨论, 可得递推关系

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2},$$

若令 $a_0=1$, 则 $a_0$, $a_1$, $a_2$ 满足上述关系, 故按初始值 $a_0=1$, $a_1=2$ 解上述递推关系即得 $a_n$.

**10**. 设至少要移动 $a_n$ 次才能把甲桌上这堆盘子移到另一桌子上. 我们先来建立 $a_n$ 满足的递推关系. 按照规定, 只有当 $n-1$ 个盘子都移走后, 才能移动最大的盘子. 因为只有三个桌子能放盘子, 所以只有把上面 $n-1$ 个盘子依大小次序排好放在乙(或丙)桌上, 最大的那个盘子才能移放到丙(或乙)桌上. 因此, 在移动最大的盘子前必须移动 $a_{n-1}$ 次. 当大盘子移动到丙(或乙)桌上后, 乙桌上那 $n-1$ 个盘子要依次放到大盘子上, 还得移动 $a_{n-1}$ 次, 因此总共要移动 $2a_{n-1}+1$ 次. 于是得递推关系

$$a_n=2a_{n-1}+1,$$

这是一个非齐次的递推关系. 显然 $a_1=1$, 若规定 $a_0=0$, 则 $a_0$、$a_1$ 满足上述递推关系. 设 $f(x)$ 是 $a_n$ 的母函数, 则有

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$-2xf(x)=-2a_0x-2a_1x^2-\cdots-2a_{n-1}x^n+\cdots$$

$$-\frac{1}{1-x}=-1-x-x^2-\cdots-x^n-\cdots$$

把这三个式子加起来得

$$(1-2x)f(x)-\frac{1}{1-x}=(a_0-1)+(a_1-2a_0-1)x+\cdots+(a_n-2a_{n-1}-1)x^n+\cdots$$

$$=-1,$$

所以
$$f(x)=\frac{x}{(1-2x)(1-x)}.$$

分解成部分分式并展开成形式幂级数得:

$$f(x)=\frac{1}{1-2x}-\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}2^nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)x^n,$$

所以
$$a_n=2^n-1.\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

**习题七解答**

**3**. $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

**4**. 直角三角形中每一对整点必是不定方程

$$x+2y=r \quad (0\leqslant r\leqslant n)$$

的非负整数解，反之亦然。若令 $a_r$ 是上述方程的非负整数解的个数，则三角形内整点的个数 $s_n$ 为

$$s_n=a_0+a_1+\cdots+a_n,$$

已知 $a_r$ 的母函数为

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}=\frac{1}{(1-x)^2(1+x)},$$

故 $s_n$ 的母函数为

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^3(1+x)},$$

分解成部分分式并展开成形式幂级数，得

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{8}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^3}+\frac{1}{4}\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{8}\frac{1}{1-x}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{8}(-1)^n+\frac{1}{2}C_{n+2}^2+\frac{1}{4}(n+1)+\frac{1}{8}\right\}x^n,\end{aligned}$$

所以

$$s_n=\frac{1}{8}(1+(-1)^n)+\frac{1}{4}(n+3)(n+1)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(n+2)^2, & \text{若 } n \text{ 为偶数,}\\ \dfrac{1}{4}(n+1)(n+3), & \text{若 } n \text{ 为奇数.}\end{cases}$$

**习题八解答**

**1**. 用数学归纳法。

**2**. 用数学归纳法。

**3**. 设有 $a_n$ 种不同的方式组成乘积 $y_1\times y_2\times\cdots\times y_n$。我们导出 $a_n$ 满足的递推关系。把 $n$ 个数分成两组：

$$y_1, y_2, \cdots, y_k; \ y_{k+1}, \cdots, y_n.$$

前 $k$ 个数有 $a_k$ 种不同的方式组成乘积 $y_1\times y_2\times\cdots\times y_k$；后 $n-k$ 个数有 $a_{n-k}$ 种不同的方式组成乘积 $y_{k+1}\times\cdots\times y_n$。因此，就这种分法而言共有 $a_k a_{n-k}$ 种不同的方式组成乘积 $y_1\times y_2\times\cdots\times y_n$。由于 $k$ 可以取 1, 2, …, $n-1$ 中的任一值，因而得递推关系式

$$a_n=a_1a_{n-1}+a_2a_{n-2}+\cdots+a_{n-1}a_1,$$

又显然有 $a_1=a_2=1$. 这个递推关系就是(92)，因而解得

$$a_n=\frac{1}{n}C_{2(n-1)}^{n-1}. \quad (n=1, 2, \cdots)$$

**习题九解答**

**1**. (i) $e(-x)$; (ii) $\frac{1}{1-x}$; (iii) $\frac{1}{1-2x}$.

**2**. 令$a_k=\frac{1}{m+k+1}$,由习题一第12题知,$a_k$经组合变换后得

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^ka_k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\frac{1}{m+k+1}=\frac{n!m!}{(n+m+1)!},$$

于是由反变换公式得

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kb_k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\frac{k!m!}{(k+m+1)!},$$

此即

$$\frac{1}{m+n+1}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(C_{m+k}^m)^{-1}\frac{(-1)^k}{m+k+1}.$$

**习题十解答**

**1**. 48, 30.

**2**. 100, 60.

**3**. 由定理13知道,共有

$$\frac{6!}{4!2!}=15$$

个不同的数列.

**4**. 用1表示质点沿$x$轴的正向走一个单位,用0表示质点沿$y$轴的正向走一个单位. 当质点从原点运动到(4, 2)时,它必须沿$x$轴正向走4个单位,沿$y$轴正向走2个单位,由于先后次序的不同,就形成不同的走法. 每一种走法可用一个六个数的数列来表示,例如

$$(1,0,0,1,1,1)$$

就代表一种走法:先横走一个单位,接着连续竖走两个单位,然后再横走三个单位到达(4, 2). 这样一来,问题就变成用4个1和2个0能构成多少个不同的六个数的数列. 第3题已给出了答案: 15个. 因此从原点到(4, 2)有15种不同的走法.

**5**. 设能构成$a_r$个$r$位数,则由定理14知,$a_r$的指数型母函数为

$$f_e(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right)$$

$$=\left(1+2x+2x^2+\frac{7}{6}x^3+\frac{10}{24}x^4+\frac{1}{12}x^5\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}\right),$$

展开式中$x^4$的项为

$$\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{3}+1+\frac{7}{6}+\frac{10}{24}\right)x^4=71\cdot\frac{x^4}{4!},$$

故能构成 71 个四位数。

**6**. 要构成偶数，末位数必须是 2. 这样，问题就变成用 3 个 1，1 个 2，5 个 3 能构成多少个三位数？指数型母函数为

$$f_e(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)(1+x)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right)$$

$$=\left(1+2x+\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{6}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}\right),$$

含 $x^3$ 的项为 $$\left(\frac{1}{6}+1+\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)x^3=20\cdot\frac{x^3}{3!},$$

故能组成 20 个四位数的偶数。

**7**. 设有 $a_n$ 种不同的染法，则 $a_n$ 的指数型母函数为

$$f_e(x)=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2m}}{(2m)!}+\cdots\right)^3=\frac{1}{8}(e(x)+e(-x))^3$$

$$=\frac{1}{8}\{e(3x)+3e(2x)e(-x)+3e(x)e(-2x)+e(-3x)\}$$

$$=\frac{1}{8}\{e(3x)+3e(x)+3e(-x)+e(-3x)\}$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\{3^n+3+3(-1)^n+(-1)^n3^n\}\frac{x^n}{n!},$$

所以得

$$a_n=\frac{1}{8}\{3^n[1+(-1)^n]+3[1+(-1)^n]\}=\begin{cases}0, & n=\text{奇数},\\ \frac{3}{4}(3^{n-1}+1), & n=\text{偶数}.\end{cases}$$

### 习题十一解答

**3**. $S_n^{(5)}=\dfrac{(n+1)^2}{36}\{6(n+1)^4-18(n+1)^3+15(n+1)^2-3\},$

$S_n^{(6)}=\dfrac{n+1}{42}\{6(n+1)^6-21(n+1)^5+21(n+1)^4-7(n+1)^2+1\}.$